

テトラちゃんとハーモニック・ナンバー *

結城浩[†]

2006年4月

書籍版『数学ガール』の最新情報は、<http://www.hyuki.com/girl/>を参照してください。

* <http://www.hyuki.com/girl/harmonic.html>

[†] Hiroshi Yuki © 2006, All rights reserved. <http://www.hyuki.com/>

目次

1	宝探し	3
2	すべての図書室に存在する問題	6
3	無限上昇螺旋階段付音楽室	20
4	不機嫌なゼータ	21
5	無限大の過大評価	23
6	教室における調和	29
7	離散と連続	32
8	未知の扉	43
9	世界に素数がふたつだけなら	46
10	プラネタリウム	54

1 宝探し

テトラちゃん

「せーんばいっ」

校門に立っていると、テトラちゃんがやってきた。

「こちらにいらしたんですね。さっき図書室を覗いたら、いらっしゃらなかったの、どうしたのかなあ……と思っていたんです。これからお帰りなら、ご一緒しても……あれ？ それは？」

手にしていたカードを渡すと、彼女はそれをじっと見る。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

テトラちゃんは高校一年生。僕の一年後輩だ。何かというと子犬みたいに僕のそばにやってくる。ときどき図書室で一緒に勉強する仲良しだ。よくしゃべるし、ちょっと落ち着きが足りないけれど、僕が息を飲むほど真面目な顔つきをすることもある。

「これは……なんですか」テトラちゃんが顔を上げる。

「ん、研究課題。この式からスタートして《おもしろいもの》は見つかるかな、という課題」

「はあ？」テトラちゃんは、よくわからないという顔をする。

「ここにはおもしろいものが埋まっているけれど、あなたは掘り出せますか、ということだね」

「おもしろいもの？」

「そう、森の中に隠された宝物のような。このカードは、村木先生からもらったんだ」

「へえ……」

「先生は、謎めいた演出が好きみたいで、このカードを無言で手渡した。で、僕は、こう思った」

ここには、なにかが埋まってる。
なにが見つかるか、わからない。
どこまで掘るかも、わからない。
でも、きっと、なにかが埋まってる。

「何を解けばいいかもわからず、解くんですか」テトラちゃんはもう一度カードを見る。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

「わけもわからず解くんじゃない。このカードを出発点にして、自分で問題を作って、それを解くんだよ」

「先輩はこの式から、もう宝物を——」

「いや、考え始めたばかりだから、まだだよ。でも、この式を見て、すぐにわかることもある」

「すぐにわかること……」

「そう。たとえば、この——」

「あっ、ああああ、あああああああっ！」

テトラちゃんの大声に僕はびっくりした。彼女は両手で口を押さえて赤くなる。

「……す、すみません。先輩、何も言わないでください。あたしでも《宝物》を掘り出せるでしょうか」

「どういうこと？」

「この研究課題、あたしにも考えられるでしょうか。あたし、一生懸命考えますから、がんばって掘りますから、話を聞いていただけませんか。そういうの、いままでやったことないんです。研究課題、やってみたいんです」

そう言いながら、テトラちゃんはシャベルで穴を掘るジェスチャをする。僕はにっこりする。

「いいよ、もちろん。レポートにして村木先生に持って行くといいね」

「えー、駄目ですよ。そんな、恐れ多い」

彼女は、首をぶんぶんと横に振る。相変わらず、ダイナミックだなあ。

「じゃ、そのカードはテトラちゃんにあげるよ。僕は僕で考える。テトラちゃんもテトラちゃんです。明日、図書室に成果を持ち寄る」

「はいっ！ がんばりますっ！」

テトラちゃんは、丸くて大きな目を輝かせて両手をぐっ、と握り締める。本当に一途な子だ。

「先輩……。先輩は、あたしの――」

そこでテトラちゃんは僕の背後を見て、言葉を切る。そして、小さな声で（あちゃ）と言った。

振り返ると、ミルカさんが立っていた。

ミルカさん

「お待たせ」ミルカさんは僕に向かって微笑む。

僕は、校門で二人の女の子に挟まれる格好になる。二人の《すきま》に立っている僕。

ミルカさんは高校二年生、僕のクラスメイトだ。メタルフレームの眼鏡がよく似合う綺麗な人で、数学がとても得意。僕が図書室で勉強していると、彼女は僕のノートに勝手に書き込みをしていく。そればかりか、いきなり講義口調で説明を始めたりする。人の都合なんかお構いなしだ。でも、そんな彼女の話に僕はいつも引き込まれて――。

テトラちゃんは急にあたふたする。「お待ち合わせ、してらしたんですね……。あ、あたし――お邪魔でしたね。何だか、あの――失礼します」ぺこりと頭を下げ、半歩あとずさり。

「ふうん……」

ミルカさんは、ゆっくりテトラちゃんを見て、僕を見て、またテトラちゃんを見る。目を細めて微笑み、やわらかな声でテトラちゃんに言う。

「いいのよ。わたしは一人で帰るから」

ミルカさんは、右手を伸ばしてテトラちゃんの頭をぽんぽん、と優しく叩き、僕とテトラちゃんの間をすり抜けていった。

テトラちゃんは頭を叩かれて首をちよっとすくめ、大きな目をぱちぱちさせる。頬が赤い。それから、ミルカさんの^{りん}凜とした後ろ姿を目で追っていく。

離れていくミルカさんは、こちらを振り向きもせず、右手を軽く挙げてひらひらと振る。まるで、見送るテトラちゃんへあいさつするかのよう。やがて、角を曲がって見えなくなった。

そんなやりとりの中、僕はといえば、声を出さないように耐えているのがやっとだった。ミルカさんは、前を通るときに、僕のつま先を踏んづけていったのだ。さりげなく。でも力いっぱい。

……かなり痛い。

2 すべての図書室に存在する問題

「どう？」

次の日。放課後の図書室に人は少ない。

テトラちゃんが泣きそうな顔で開いたノートには、数式がたった一行だけ書かれていた。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

「先輩……。やっぱり、数学だめです。あたし」

「いやいや、もとの数式の意味を捕まえようとしていたんだね。この式は間違いじゃないよ」

「先輩。でも、あたし、ここから何をしたらよいのか、さっぱりわかりません。何かおもしろいものを見つきたいんですけれど……」

「無限に続くものって、何となくわかった気になるけれど、きちんと取り扱うのは、とても難しいんだ。テトラちゃんのチャレンジ精神はたいしたもんだよ。ここから先は、一緒にやっぺいこうね」

「え、あ、すみません。貴重な時間を……」

「いや、大丈夫。少しずつ行こう」

部分和と無限級数

「問題の式 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ を見よう。この式でわかりにくいのは、^{無限大} ∞ の部分だね」

「 ∞ は無限大という数ですね」

「無限大は《数》じゃない。少なくとも普通は、数として扱わない。たとえば、実数に ∞ は含まれていない」

「あ、そうなんですか」

「そう。 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ と書くと、 k を 1 から ∞ まで変化させて $\frac{1}{k}$ を足し合わせるみたいに読める。まあ、そう考えても悪い訳じゃないけれど、 ∞ という数がどこかにあって、そこまで k を変化させるというのは正確な表現じゃない。無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ は、部分和 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ の極限として次のように定義される」

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

「はあ……難しいですね」

「うん。難しい——まあ、日常の言葉で表現するのが難しいから数式で書くんだけどね。ともかく、無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ を考える前に部分和 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ を考えることにしよう」

「無限級数と部分和って、どこが違うんですか」

「もう少し大きく書こうか。これが無限級数。単に級数ともいう」

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

「これが部分和」

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

「どう、違いはわかった？」

「はい、 ∞ と n とが違う……。でも、 n は変数なんですから、 ∞ にしても同じなのでは……」

「いやいや。大違いだよ。確かに、 n は変数だけれど、有限のある数を表している。 ∞ を入れるわけにはいかない。 n に有限の値を具体的に与えると、実際に足すことができる。有限個の項を足せばいいんだから、計算結果は必ず得られる。まずは、計算結果はさておき、 \sum に慣れるため、 n が $1, 2, 3, \dots, 16$ の場合の式を具体的に書いてみよう」

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = \frac{1}{1}$$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\sum_{k=1}^6 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

$$\sum_{k=1}^7 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

$$\sum_{k=1}^8 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$\sum_{k=1}^9 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$\sum_{k=1}^{11} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}$$

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}$$

$$\sum_{k=1}^{13} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}$$

$$\sum_{k=1}^{14} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14}$$

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}$$

$$\sum_{k=1}^{16} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$$

当たり前のところから

「はじめに、 n が決まれば $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ の値も決まることに注目しよう。だから、たとえば S_n のように書き表してもよい」

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (S_n \text{ を定義})$$

「ちよつ、ちよつとすみません。《n で決まる》というところが、よくわかりませんでした」

「うん、そうやって自分のわからない場所をきちんと聞くのは、テトラちゃんの良いところだね。n の値を 5 とか 1000 とか、とにかく具体的に与えると $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ という式の値は定まる。それが《n が決まれば $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ の値も決まる》という意味だよ。だから、n を添字そえじに持たせて S_n と書くことができる。名前の付け方の話だ」

「どうして S なんですか」

「sum の頭文字」

「なるほど。和sumですね。sum up……つと。 S_n と書くと、n は残っていませんけれど、k はどこに消えたんでしょうか」

「 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ の k は、 \sum の中だけで使う作業用の変数で、外からは見えない。束縛そくばく変数という。この和の中だけで使える——和の中に束縛されている——変数ということだね。別に k である必要はなくて、s でも t でもいい。n にしちや駄目だけど。n は別の意味ですでに使っているからね」

「わかりました。ちよつと勘違いしてました。k は、1 から n まで動く変数ですものね。すみません、話の腰を折ってしまつて」

「いや、いいんだよ。わからないところを聞いてくれたほうが話しやすい。大丈夫」

僕たちは笑みを交わす。

「では、 S_n に関してわかることを列挙していこう——《見出したる真の命題、時を移さず示すべし》」

「はい？」

「——まずは、これかな」

$n = 1$ ならば、 $S_n = 1$ が成り立つ

「はい、わかります。 $S_1 = 1$ ですから。でもそんなのは当たり前……そつ

か、《当たり前のところから出発するのはいいこと》なんでした」

「そうそう。よく覚えてるね。では、次にわかること」

すべての正の整数 n について、 $S_n > 0$ が成り立つ

「はい、いいです」

「じゃ、これはどうかな」

すべての正の整数 n について、 n が大きくなると、 S_n も大きくなる

「ええと……はい、そうですね。 n が大きくなるってことは、それだけ多く足していくってことですから」

「そうそう。正の数を足せば大きくなるよね。さっきの《 n が大きくなると、 S_n も大きくなる》は、数式を使ってこう書いてもよい。このほうが厳密かな」

すべての正の整数 n について、 $S_n < S_{n+1}$ が成り立つ

「確かに、これは成り立ちますね。でも……《 n が大きくなると、 S_n も大きくなる》よりも《 $S_n < S_{n+1}$ が成り立つ》は厳密なんですか。厳密……うーん」

僕はテトラちゃんが考えている間、じっと待つ。静かに流れる時間。

「あっ、何だかわかりました。《大きくなる》という動作的な表現と、不等号を使った《大きい》という叙述的じょじゅつな表現との違いですね。ちょうど、英語の一般動詞と be 動詞のように」

「えっ……」

僕は、テトラちゃん言葉に軽い衝撃を受ける。《大きくなる》と《大きい》の違い？ 一般動詞と be 動詞？ ——なるほど。確かにそうかもしれない。いつだったか、村木先生の特別授業 “Reality of Real Number” のときも、そんな話が出ていたような気がする。数列が変化していく様子を追う観点と、数列の各項の関係式で捕える観点と……《手続き的な定義と宣言的な

定義》と呼んでいたか？

「先輩？ どうかしました？」

「いや、言われてみればそういう見方もあるな、と思ってね。僕が言いたかったのは《日常の言葉の代わりに数式を使うと、意味が厳密になる》というほどの意味だったんだけど。それにしても、テトラちゃん、きみって何者？」

「はに？」テトラちゃんは、くりっとした目を見開いて、首をかしげた。

「いや……。先に進もうか。こういうのはどうかな」

$$\text{すべての正の整数 } n \text{ について、 } S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n} \text{ (?)}$$

「なぜに分数が……あ、これも当たり前ですね。だって、 S_n の定義は――

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

ですものね。うん、当たり前です。はい」

「残念、違います。 $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n}$ は成り立ちません。本当は、こうだよ。右辺の分母に注目」

$$\text{すべての正の整数 } n \text{ について、 } S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$$

「え――あ、ほんとだ。途中の計算式を書きますね」

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

「先輩っ。ひっかけ問題はひどいです」

「ごめんごめん。でも、ちゃんと確認しなきゃ駄目だよ」

「そうなんですけどお……」不満げに唇をとがらせる。

「じゃね、今度はテトラちゃんが何か見つけてごらん」

「うーん……じゃ、 $S_{n+1} - S_n$ が出てきましたから——こういうのはどうでしょう」

すべての正の整数 n について、 n が大きくなると、 $S_{n+1} - S_n$ は小さくなる

「うまいうまい。いいね。数式を使って書くとどうなるかな」

「こうでしょうか」

すべての正の整数 n について、 $S_{n+1} - S_n > S_{n+2} - S_{n+1}$ が成り立つ

「その通り！ とてもいい」

「足していく数が、 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ と《小さくなっていく》ことを、《小さい》という数式で表現したことになるんですね」

すべての……

「気がついたことを何でも数式で表現してみることは大切だ。当たり前のことでもかまわず書いてみる。これは、無駄みたいだけれど、とても大切なことなんだ——少なくとも僕はそう思っている」

「ええ、あたしも先輩が以前おっしゃっていた《粘土をこねるように数式をいじる》というのを思い出しました。こねこね、ですね」と言いながら、粘土をこねる手つきをするテトラちゃん。「あ……でも、《すべての正の整数 n について》という部分は数式じゃないですよ」

「うん。正の整数の集合を \mathbb{N} とすると、こんな数式で表せる」

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{n+1} - S_n > S_{n+2} - S_{n+1}$$

「……？」

「 $\forall n \in \mathbb{N} \dots$ 」は「For all n in $\mathbb{N} \dots$ 」と読めばいいよ」

「なるほど！ それならよくわかります。確かに《すべての正の整数 n について》ですね。英語の通り。あっ、 \forall は All の A が逆立ちしているのかあ！」

「そうそう。さて、もとの数式に戻ってみよう」

$$S_1 = \frac{1}{1}$$

$$S_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$S_4 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$S_5 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

⋮

「これを順番に見ていったとき、増える分——つまり $S_{n+1} - S_n$ のこと——に注目しよう」

$$\begin{aligned}
S_2 - S_1 &= \frac{1}{2} \\
S_3 - S_2 &= \frac{1}{3} \\
S_4 - S_3 &= \frac{1}{4} \\
S_5 - S_4 &= \frac{1}{5} \\
S_6 - S_5 &= \frac{1}{6} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

「このように、 $S_{n+1} - S_n$ はだんだん小さくなっていくね。さっきテトラちゃんも言ってた通りだ」

「はい」

「 $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, \dots$ 自体は、大きくなっていくけれど、その《大きくなり方》つまり《増え方》は、だんだん鈍くなっていく。しだいに、少ししか増えなくなる。それで――」

「あっ、ちょっと待ってください。その、《増え方はだんだん鈍くなる》っていうのは、あたしがさっき書いた数式で表されていると思っていいですよ。ええと……。これです」

すべての正の整数 n について、 $S_{n+1} - S_n > S_{n+2} - S_{n+1}$ が成り立つ

「そうそう、その通り。増え方はだんだん鈍くなる、という言い方は曖昧あいまいだけれど、このように数式で書けば意味がはっきりする。つまり、わかりやすくなる。数式はややこしいからわかりにくい、と考える人もいるけれど、数式で書かないと、かえってわかりにくくなることも多い。数式は言葉だ。うまく使えば、自分の理解を助け、言いたいことを伝える助けとなる」

「はい。……えとえと。練習します。これでよいですか」

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{n+1} - S_n > S_{n+2} - S_{n+1}$$

「その通り」

テトラちゃんは嬉しそうだ。

最初の宝物

「さて、そろそろ問題が見えてきたぞ。最初の宝物だ」

「ふに？」

「相変わらず、 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ だとするよ。 n を大きくしていくと、 S_n 自身はだんだん大きくなる。でも S_n の増え方はだんだん鈍くなる。それでは……、 n を大きくすれば、 S_n は、いくらでも大きくなるのだろうか。それとも、 n をいくら大きくしても、ある数より大きくはならないのだろうか」

「それは、こういうことですよね。」

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

をずっと続けていったとき、いくらでも大きくなるかどうか——って、あ、これが村木先生の問題？」

「そう。先生のカードから出てくる、最初の問題はおそらくこれだ。ちゃんと書こう」

問題 1. 実数 M が与えられたとき、式

$$M < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

が成り立つような正の整数 n は存在するか。

「 M って何ですか」

「テトラちゃんは、何だと思う？」

「ええと、お、大きな数？」

「まあ、そういう気持ちだね。《いくらでも大きくなる》と表現するよりも、任意の実数に M という名前を付けておいて《 M よりも大きい》と表現したほうがはっきりする。どんな M に対しても問題 1 のような n が存在するならば、 S_n はいくらでも大きくなると言ってよい。でも、ある M に対して、 n が存在しない場合があるなら、 S_n はいくらでも大きくなるとは言えない」

「なるほど……」

「問題 1 を数式で書いておこう」

問題 1a. 実数の集合を \mathbb{R} とし、正の整数の集合を \mathbb{N} とする。次の式は成り立つか。

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad M < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

「よ？」

「ヨはカタカナのヨじゃない。Exists の E をひっくり返した記号だよ」

「《存在する》ですね。ということは、こうですか」

For all M in \mathbb{R} n exists in \mathbb{N} ...

「テトラちゃんの発音は、きれいだね。“ n exists” でもいいし、“there exists n ” でもいいよ。such that を補うとわかりやすい」

For all M in \mathbb{R} there exists n in \mathbb{N} such that $M < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

「なるほど、よくわかります」

「次の二つの数式 (1) と (2) は、まったく違う意味になることに注意しよう」

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad M < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (1)$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall M \in \mathbb{R} \quad M < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (2)$$

「英文にしたらこんな感じになる」

For all M in \mathbb{R} there exists n in \mathbb{N} such that $M < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. (1)

There exists n in \mathbb{N} such that for all M in \mathbb{R} $M < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. (2)

テトラちゃんは、口の中で何回か英文をつぶやき、しばらく考える。

「……何となく、わかりました。順番が重要なんですね。(1)のほうでは M が最初に決まって n を探しています。 n を探しているとき M は変わらないです。でも、(2)のほうでは n が最初に決まって、その n に対してすべての M で、あれ？ あれ？ 違うかな……」

「いや、合ってるよ。(1)のほうでは、 M を最初に選んでおいて、それに対して n を見つける。そういうのをすべての M に対して行えると主張している。 M を選ぶごとに n は異なってもよい。でも(2)のほうでは、まず n を見つける。その n はどういう数かということ、すべての実数 M についてあの不等式が成り立つようなすごい n だ。(2)では、 M を選ぶときに n は変わらない。今回の問題 1a の主張は、(1)だ。良いかな？」

「……なんとか」

「今日はここまでにしようか。そろそろ司書の瑞谷先生が現れそうな時分だよ。この宝箱を開けるのは明日の放課後にしよう」

「はいっ！ 先輩……あたし——すごく嬉しいです！」

「だよ。数学っておもしろいよね。数式という新しい言葉で、曖昧さを

なくし、思考を整理して……」

「って言うか、あたしは先輩とこうして——ええと、うん、はい、そうですね。明日も、お願いします！」

3 無限上昇螺旋階段付音楽室

次の日。昼休みの音楽室。通りかかった生徒はみな、美しいピアノの音に惹かれて中をのぞく。

二人の美少女がグランドピアノで連弾をしている。

一人はミルカさん。もう一人は、エイエイ——ピアノ愛好会《フォルティッシモ》のリーダーだ。

ミルカさんとエイエイは、^{スケール}上昇音階を基調にした変奏曲を弾いている。二人でぴったりと呼吸を合わせ、似たフレーズを何度も高速で弾き、繰り返すごとに音階が上昇していく。あれれ？ ピアノの音域をずっと越えて上っていくような——いや、そんなことは無理だ。はっと気が付くと、いつの間にか音が下がっている。でも、いつ下がった？ 何だか、とっても不思議な感覚——無限の階段を上っていくような感覚だ。大きな翼があれば一気に飛び立てるのに、^{らせん}螺旋階段を一步ずつ昇らねばならないもどかしさ。無限上昇の無限音階、永遠に変奏し続ける音楽。こんな曲がピアノで弾けるとは驚きだ。

僕の位置からはミルカさんのよく動く長い指が見えている——（あたたかい、あの指）——うん、確かに音はときどき下がっている。手が左に戻るタイミングがある。でも、僕の耳には音が上昇し続けているようにしか聞こえない。

曲の最後はゆっくりデクレシェンドしてフェードアウト。最後の残響が消えるタイミングで、息を止めるようにして聞いていたみなさんの歓声と拍手。ミルカさんとエイエイは立ち上がって礼をする。

「おもしろかったかな」ミルカさんが僕に聞く。

「不思議だった。有限の^{キー}鍵しかないのに、無限の^{キー}調を上っていくみたいで」

と僕は言った。

「正の無限大に発散していくようでおもしろいよね」ミルカさんはいたずらっぽく笑う。

「オクターブ離れた音をうまく使っているのかな」と僕が言った。

「まあね。複数の音を《オクターブずらし》したまま平行に上昇させる。そして、音が高くなるほど、音量を小さくする。音が上で消えると同時に小さい音量で低い音を入れていく。中音域が最大の音量。すると人間の耳はだまされるんだよ。一人の手だと限界があるから、二人でやったけどね」

「種明かししたらあかんやん」エイエイがやってきた。「曲つくるの、難しかったんやで。単純な音階はつまらんやろ？ アップテンポにして、聴いてる人が飽きんようにな。でもシンプルにせんと不思議な曲だと気づけへんし。難しかったわあ。ミルカたんは、指、よう動くから助かる、助かる」

「そうね。次回はメビウス状のハーモニーを所望」ミルカさんはにこにこする。

「どんな曲や！……まあ、また遊ぼな」エイエイは苦笑して、自分の教室に戻っていった。

ミルカさんは、人差し指をくるくる回してハミングしながら、僕と一緒に教室へ向かう。

とても機嫌が良い。

4 不機嫌なゼータ

昼休み後半。ミルカさんは、昼食代わりのキットカットを^{かじ}嚙りながら僕の前の席に座る。

「村木先生のこれ、もう見た？」とって、ミルカさんはカードを置く。

ζ(1)

(あれ？ 僕のと違うな)

ミルカさんは僕の返事を待たずに話し始める。

「 $\zeta(1)$ を研究せよってことなんだろうけれど、 $\zeta(1)$ が発散することは有名だし、証明だつてすぐにできる。だからむしろ、違うリズムの式を調べてみようかなと思って、こんなのを考えたんだよ。まず――」

僕はミルカさんのテンポの早い説明をぼんやりと聞き流しながら、（そうか、先生は今回、ミルカさんに違うカードを渡したんだ）と考えていた。^{ゼータ} ζ 関数って聞いたことあるなあ。確か最先端の数学に関連していたはずだ。そうか。才媛ミルカさんの実力に合わせた難しい課題なんだな。

……発散といえば、昨日の問題、テトラちゃんは解けただろうか。テトラちゃん。あのバタバタっ娘は何者なんだろう。数学はそれほど得意じゃないと思ってたけれど、動作的こと叙述的――は、鋭い洞察だった。本人はあまり意識していないようだが。

最初の頃は、後輩に教えるというスタンスでテトラちゃんと話していた。でも、彼女とやりとりをしていると、何だか、僕の考えのほう整理されて……。僕が話す。テトラちゃんが受け止める。そういうやりとりが一個一個積み重なって、ちょうど階段を一步一步のぼっていくような感覚がある。テトラちゃんが話す。僕が受け止める。はは。漸化式みたいだな。少しずつ少しずつ変化していく。一つ一つ確かめる。そういえば、英語で表現すると、テトラちゃんの理解のスピードが急に上がるのはおもしろかった。言葉の力か。……それにしても、テトラちゃんのあの大きな目でじっと見られると、なんとも――。

「ねえ」とミルカさんが言った。

気がつくやうに、無表情のミルカさんが僕をじっと見ている。

しまった、話をずっと聞き流していた。これは――まずいな。

授業のベルが鳴る。

ミルカさんは無言のまま席を立ち、自分の席に戻る。もうこちらを見ようともしない。

とても機嫌が悪い。

5 無限大の過大評価

今日は図書整理の日だったので図書室が使えず、僕とテトラちゃんは、別館にあるアメニティ・スペース《がくら》で計算することにした。僕たちは隅の席に陣取る。

「失礼します」

丁寧に一礼して、僕の隣に座るテトラちゃん。少し遅れて、いつもの彼女の香り。どこかで誰かが練習しているフルートの二重奏。

僕は黙って数式を展開する。テトラちゃんは横からのぞき込む。

$$\begin{aligned} S_{16} &= \sum_{k=1}^{16} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{1 \text{ 個}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ 個}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ 個}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ 個}} \\ &\geq \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) \\ &= \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2} \times 1\right) + \left(\frac{1}{4} \times 2\right) + \left(\frac{1}{8} \times 4\right) + \left(\frac{1}{16} \times 8\right) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{4}{2} \end{aligned}$$

「……ここで一息入れようか。途中で不等式に変わるけれど、わかるよね。一般化しやすいように、最後まで計算しない。いまは、 S_{16} を考えたけれど、同じように $S_1, S_2, S_4, S_8, S_{16}, \dots$ を考えると、こうなるよ」

$$\begin{aligned}
S_1 &\geq 1 + \frac{0}{2} \\
S_2 &> 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &> 1 + \frac{2}{2} \\
S_8 &> 1 + \frac{3}{2} \\
S_{16} &> 1 + \frac{4}{2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

「これを一般化するのは難しくない。m を 0 以上の整数として、以下が成り立つ」

$$S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$$

「でも、これは不等式ですよ。等式じゃないと、 S_{2^m} の値は正しく求められないのでは？」

「いまの目的は、 S_{2^m} の値を正しく求めることじゃない。 S_{2^m} をどこまで大きくできるかを見極めることなんだよ。上の式で m が大きいとどうなるかを考えてごらん」

「……あっ、わかりましたわかりました！ いくらでも大きくなります！ m を大きくすれば、 $1 + \frac{m}{2}$ はいくらでも大きくできます！ だから、不等号を考えて、うん！ 大きくなります。 S_{2^m} は。いくらでも！ m を大きくすると！」

「まあ、落ち着いて。問題文からきちんとやってみよう。M が与えられたとき、 $M < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ が成り立つような n を作れるかを考える」

「はい、もうわかりました。どんなに大きな数 M に対しても、 m を十分に大きくすれば、

$$M < 1 + \frac{m}{2}$$

になるような m を見つけることができます。たとえば、 $m = 2M$ にしちゃえばいいですね。そして、 m が見つかったら、今度は、 $n = 2^m$ とします。つまり、 m を使って n を作ります。その n が求める n ですね」

$$M < 1 + \frac{m}{2} \leq S_{2^m} = S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

「そうだね。だから昨日の問題 1 の解答としては……」

解答 1. 実数 M が与えられたとき、式

$$M < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

が成り立つような正の整数 n は存在する。

解答 1a. 実数の集合を \mathbb{R} とし、正の整数の集合を \mathbb{N} とする。次の式は成り立つ。

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad M < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

「宝物、ひとつ見つけたね」と僕が言った。

「そうか、不等式で良いんですね。正確な値を求めなくても、小さい方から押し上げて……」

テトラちゃんは、バレーボールのトスをするように両手を上げて言う。

「不思議です、先輩。 $1 + \frac{m}{2}$ っていう、大きくなる数があり、それで S_{2^m} がぐうって押し上げられます。押し上げるために不等式が使えるんですね。ええっと、でも……だんだん小さくなる数 $\frac{1}{k}$ を足しているのに、合計 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

は、いくらでも大きくなるのですね。不思議だなあ」テトラちゃんは独り合点で何度も頷く。

「ふむ。その《いくらでも大きくなる》をすべての項が0以上である数列について、数式で表現しておこう」そう言いながら、僕はノートに書き込んでいく。

「すべての項が0以上である数列 $a_k \geq 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) があって*1、部分和 $\sum_{k=1}^n a_k$ に対して、

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad M < \sum_{k=1}^n a_k$$

が成り立つとき、 $\sum_{k=1}^n a_k$ は $n \rightarrow \infty$ で正の無限大に発散すると呼ぶことにする。そして、それを

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$$

と表現する*2。 $a_k = \frac{1}{k}$ の場合が、問題1にあたる。無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ は、正の無限大に発散するんだ」

テトラちゃんは僕の書いたノートをじっと見て、真剣な顔で考えている。

「どんな正の数でも無限に足していけば、いくらでも大きくなるってことなんですかねえ……。やっぱり無限ですものねえ」

「え？ いま、怪しげなことを言ったね。こういうことをいいたいのかな」

問題 2. 実数の集合を \mathbb{R} , 正の整数の集合を \mathbb{N} , $\forall k \in \mathbb{N} a_k > 0$ とする。次の式は常に成り立つか。

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad M < \sum_{k=1}^n a_k$$

*1 「僕」が $a_k \geq 0$ という条件をつけた理由は何だろう。(ヒント: $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \quad M < \sum_{k=1}^n a_k$)

*2 数ではない ∞ が等式に使われている。このときの等号 (=) の意味を考えよう。

「はい、問題2は成り立つと思います。だって…… a_k っていう正の数を、
すごくたくさん足せば——つまり n を大きくすれば——それだけ和は大きくなりますよね。で、いつか M よりも和 $\sum_{k=1}^n a_k$ のほうが大きくなる」

「うーん。気持ちはわかるけれど、テトラちゃんは、無限を過大評価しているよ。変な言い方だけどね」

「え？ 正の数をいくら足していっても、 M より大きくなならない——大きくできない場合があるんですか？」

「もちろん。たとえば、数列 a_k の一般項が、

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

だとしたらどうかな」

「え？」

「この場合、すべての正の整数 k に対して $a_k > 0$ は成り立つ。けれども、 $\sum_{k=1}^n a_k$ はそれほど大きくなれない。だって……」

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \quad (?) \\ &< \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

「あの、すみません……。この式変形がよくわかりませんでした」

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \quad (?)$$

「分母を払えばすぐにわかるよ。等比数列の和の公式だね」

「でも、 $n = 1$ のとき、左辺は $\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ で右辺は $\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ じゃないか
なって……」

「えっ?……あ、ほんとだ。正しい式変形はこうだね」

$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$ $= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ $= \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) - \frac{1}{2^0}$ $= \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - 1$ $< \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1$ $= 1$	<p>a_k の定義から</p> <p>\sum を展開した</p> <p>計算しやすくするため、 $\frac{1}{2^0}$ を加えて引いた</p> <p>等比数列の和の公式を使う</p> <p>$\frac{1}{2^{n+1}}$ の項を除いた</p> <p>計算した</p>
--	---

「要するに $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$ は、どんなに大きな n を持ってきても 1 を越えられない。いくらたくさん加えても、 $\frac{1}{2^k}$ が急激に小さくなる (0 に近づく) ために、和は 1 を越えられないんだ。 $M < 1$ なら n は存在するけれど、 $M \geq 1$ なら n は存在しない。だから、 $a_k = \frac{1}{2^k}$ を反例として、問題 2 の答えはこうなる」

解答 2. 実数の集合を \mathbb{R} , 正の整数の集合を \mathbb{N} , $\forall k \in \mathbb{N} a_k > 0$ とする。

次の式は成り立つとは限らない。

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad M < \sum_{k=1}^n a_k$$

「なるほど。n を大きくしたとき、部分和がいくらでも大きくなる場合と、そうでない場合の両方があるんですか……ところで、先輩でも式変形を間違えることがあるんですね」

「それはもちろん間違えさ。もっとも、さっきの間違いは証明の流れには影響しないけれど——」

そのときすかさず、テトラちゃんは僕の口調を真似て言った。

「でも、ちゃんと確認しなきゃ駄目だよ——ですねっ。せーんぱいっ」

一瞬の沈黙の後、僕たちは顔を見合わせて吹き出した。

6 教室における調和

放課後の教室。僕は、帰ろうとしているミルカさんに声を掛ける。

「ねえ、ミルカさん。このあいだは、ぼうっとしてて、話をよく聞かなくて、ええと……ごめん。あの、ほら、昨日の $\zeta(1)$ の話。僕は ζ 関数のこと、よく知らないんだけど。 $\zeta(1)$ が発散するという話を——」

「ふうん……」

これは——これは話しにくい。

ミルカさんはチョークをとって、黒板に書き始める。

「これがゼータ関数 $\zeta(s)$ の定義。リーマンのゼータ関数 (Riemann's zeta function) だ」

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad (\text{ゼータ関数の定義})$$

ミルカさんは、続けてどんどん数式を書く。

「 $\zeta(s)$ は無限級数の形で定義されている。ここで $s = 1$ としたものが調和級数 (harmonic series) だ。ここでは Harmonic の頭文字 H を使って H_{∞} と書こう」

$$H_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (\text{調和級数の定義})$$

「すなわち、ゼータ関数で $s = 1$ とした式と、調和級数 H_{∞} は等価だ」

「え、そうなんだ。じゃあ、僕とテト——僕が考えていた無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ は $\zeta(1)$ と同じだったんだ」

先生は僕とミルカさんに同じ課題を出していたのか。

僕の台詞を無視して、ミルカさんは先を続ける。

「次の部分 and H_n を調和数 (harmonic number) という」

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (\text{調和数の定義})$$

「つまり、 $n \rightarrow \infty$ で調和数 $H_n \rightarrow$ 調和級数 H_{∞} になる」

教室にミルカさんのチョークの音が響く。

$$H_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n$$

「調和数 H_n は $n \rightarrow \infty$ で正の無限大に発散する」

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \infty$$

「すなわち、調和級数は正の無限大に発散する」

$$H_\infty = \infty$$

「すなわち、 $\zeta(1)$ は正の無限大に発散する」

$$\zeta(1) = \infty$$

「どうして、《調和級数は正の無限大に発散する》と言えるかというところ——」
ここではじめて彼女は、僕を横目で見て口元をほころばせた。もう、いつものミルカさんだ。

僕は何だかほっとしながら、テトラちゃんに示した証明を話した。m を 0 以上の整数として、 $H_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$ が成り立つことを利用した証明だ。

「そうそう。きみの証明は 14 世紀のオレームの方法と同じだね」

ミルカさんはここで目をつぶり、指揮でもするように指を L 字型に振って、ふたたび目を開ける。

「では、ここで問題だよ。調和数を正の整数から実数への関数と見なして、 $H_n = H(n)$ とする。関数 $H(x)$ の定義域は正の整数だ。では、離散的な世界での関数 $H(x)$ に対応する、連続的な世界での関数を $h(x)$ としよう。h(x) はどんな関数だろうか」

そういえば、以前「連続的な世界の関数」に対応する「離散的な世界の関数」を考えたことがあった。今度は逆か。「離散的な世界の関数 $H(x)$ 」に対応する「連続的な世界の関数 $h(x)$ 」を探すのか。

「さ、わたしはもう帰るよ。きみはゆっくり考えなさい」

ミルカさんは、手に付いたチョークの粉を手早く落として教室の出口に向かい——そこで振り返る。

「ひとこと言っておくよ。グラフを描かないのが、きみの弱点だ。数式をいじることだけが数学じゃない」

7 離散と連続

夜。僕は自室でノートを広げる。

ミルカさんからの問題は「調和数 H_n を離散的な世界の関数と見なしたとき、関数 $H(x)$ に対応する連続的な世界の関数 $h(x)$ は何か」というものだ。

$$\begin{array}{ccc} \text{離散的な世界} & \longleftrightarrow & \text{連続的な世界} \\ H(x) = \sum_{k=1}^x \frac{1}{k} & \longleftrightarrow & h(x) = ? \end{array}$$

ここでいう《対応》は感覚的なもので、正解があるとは限らないけれど、考える価値はありそうだ。どこから手をつけようか……。

やはり、以前ミルカさんが話していた、差分と微分から攻めるべきだろう。関数 $f(x)$ の差分をとる演算子 Δ を、次のように定義する。

$$\Delta f(x) = \frac{f(x+1) - f(x+0)}{(x+1) - (x+0)}$$

関数 $f(x)$ を微分する演算子 D を、次のように定義する。

$$Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{(x+h) - (x+0)}$$

これは、以下の対応を意識した冗長な書き方だ。

$$\begin{array}{ccc} \text{離散的な世界の「差分」} & \longleftrightarrow & \text{連続的な世界の「微分」} \\ \Delta f(x) = \frac{f(x+1) - f(x+0)}{(x+1) - (x+0)} & \longleftrightarrow & Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{(x+h) - (x+0)} \end{array}$$

数列 H_n を、正の整数から実数への関数と見なす。数列 H_n を関数 $H(n)$ と表して、差分を考えてみよう。

$$\begin{aligned} \Delta H(n) &= \frac{H(n+1) - H(n+0)}{(n+1) - (n+0)} \\ &= H(n+1) - H(n) \end{aligned}$$

$H(n+1) - H(n)$ が差分になる。うん、確かにこれは差分と言える。具体的には、こうなる。

$$\Delta H(n) = H(n+1) - H(n) = \frac{1}{n+1}$$

次はどっちに進もうか。離散の世界から連続の世界へ、何とか飛び移りたい。

$H(x)$ というのは《差分が $\frac{1}{x+1}$ になるような関数》だった。じゃ、 $h(x)$ は《微分が $\frac{1}{x+1}$ になるような関数》ということかな。それなら簡単だ。微分の逆演算、つまり積分すればよい。

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \log_e(x+1) + C \quad C \text{ は積分定数}$$

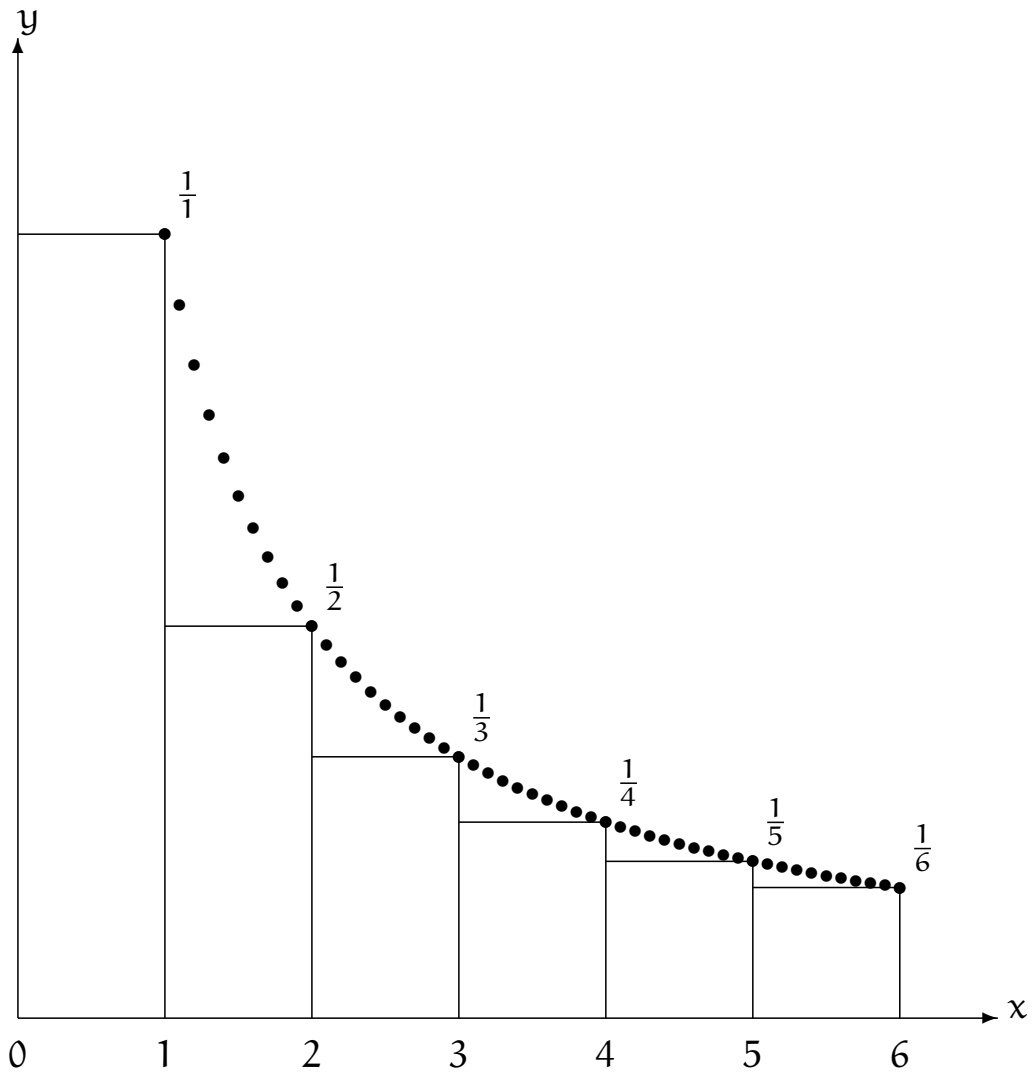
つまり、 $h(x) = \log_e(x+1)$ ということなのかなあ。……対数関数だって？

グラフを描く

調和数 $H(x) = \sum_{k=1}^x \frac{1}{k}$ が、対数関数 $h(x) = \log_e(x+1)$ に対応する——どうもピンと来ないな。

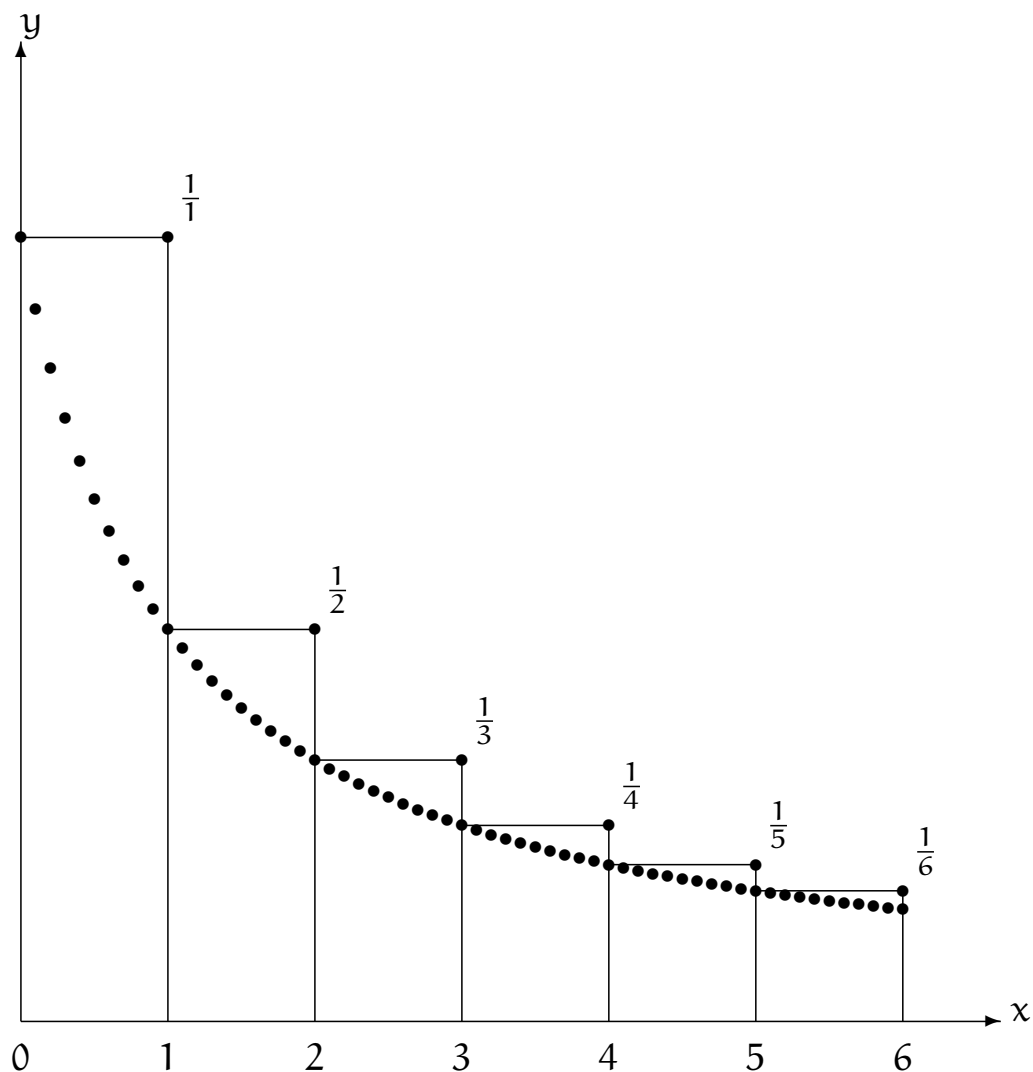
……グラフを描かないのが、きみの弱点だ。数式をいじることだけが数学じゃない……

あれだけストレートに言われると痛いな。足を踏まれるより、ずっと痛い。まあ、いいさ。彼女の言うとおりに、グラフを描いてみようじゃないか。 $H(x) = \sum_{k=1}^x \frac{1}{k}$ で、 x は正の整数なんだから、まずは、 $y = \frac{1}{x}$ のグラフを描いてみよう。幅が1で高さが $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ となる階段状の細い長方形をたくさん作る。それから、うーん。長方形の右上の角をなめらかに結んでみるか。このカーブは何になるかというところ……何をやってるんだ、僕は。 $y = \frac{1}{x}$ のカーブに決まっているじゃないか。反比例のグラフ、双曲線だ。



$H(n)$ は、 $\frac{1}{k}$ を $k = 1, 2, 3, \dots, n$ についてすべて加えたもの。つまり、この長方形の面積の合計に他ならない。長方形はすべて $y = \frac{1}{x}$ のカーブの下にあるから、長方形の合計面積は $1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx$ よりも常に小さい ($1 + \dots$ で加えている 1 は左端の長方形に相当する)。

カーブを左に動かした $y = \frac{1}{x+1}$ のカーブを使えば、今度はカーブの上に長方形が突き出るから、長方形の合計面積は、 $\int_0^n \frac{1}{x+1} dx$ よりも常に大きい。



もう少しちゃんと書こう。長方形は、二人の女の子……じゃなくて二つのカーブに挟まれる格好になる。だから、次の不等式が成り立つ。

$$\int_0^n \frac{1}{x+1} dx < H_n < 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

三つの式はこの大小関係を保ったまま、 $n \rightarrow \infty$ で正の無限大に発散する。ところで、この積分の値は具体的にどうなるか。小さい方は、 $\int_0^n \frac{1}{x+1} dx =$

$\log_e(n+1) - \log_e(0+1) = \log_e(n+1)$ で、大きい方は、 $1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \log_e n - \log_e 1 = 1 + \log_e n$ となる。

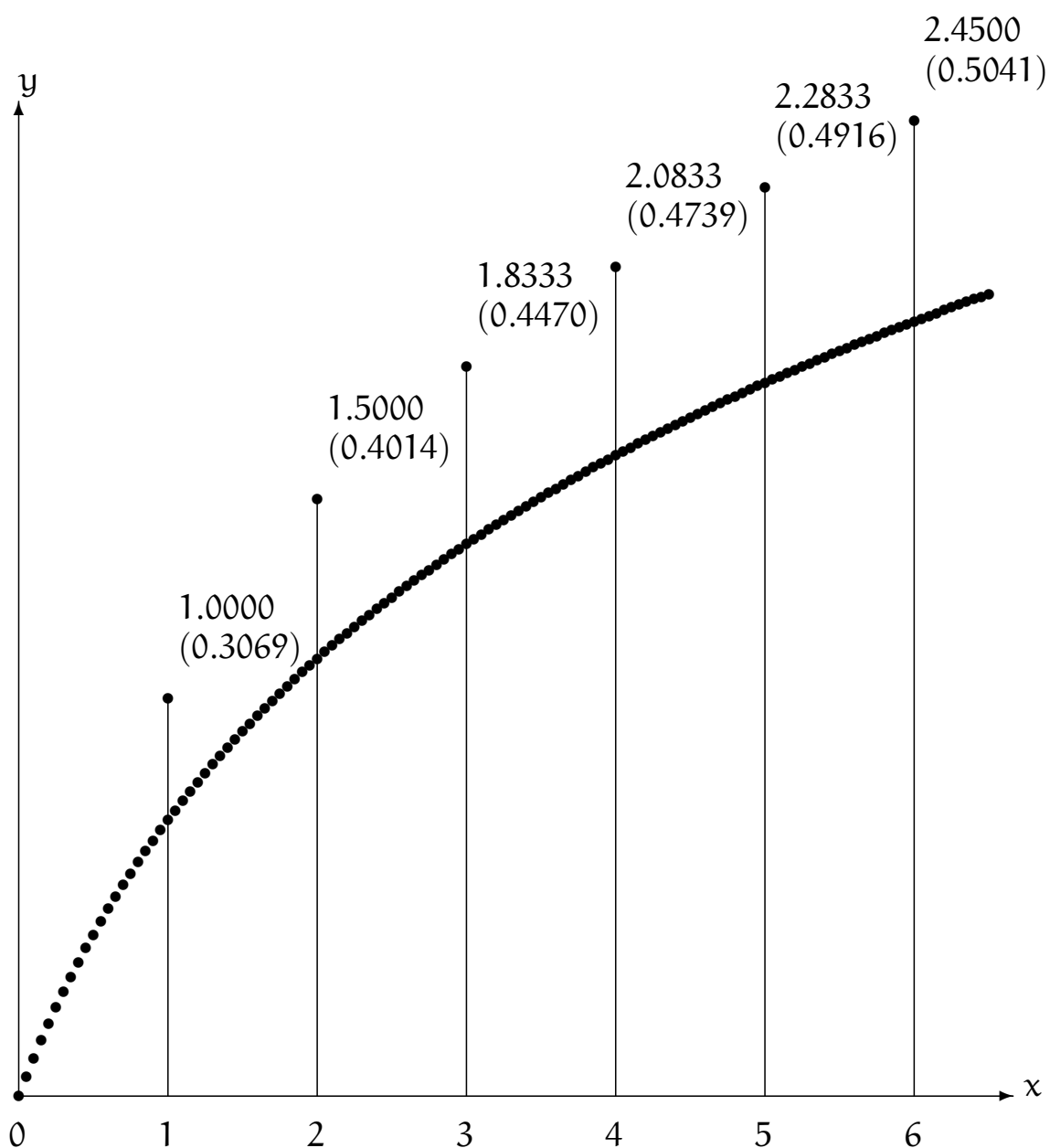
したがって、次の不等式が成り立つ。

$$\log_e(n+1) < H_n < 1 + \log_e n$$

上の不等式は、極限を見つけるための、いわゆる《はさみうち》にはならない。なぜなら、 n が非常に大きいとき、 $\log_e(n+1) \doteq \log_e n$ だから、 $\log_e(n+1)$ と $1 + \log_e n$ の間にはおおよそ 1 の《すきま》が残ってしまうからだ。けれど、調和数は対数関数に非常に似ているとは言えそうだ。

調和数のグラフを描く

さっきのは $y = \frac{1}{x}$ のグラフだった。今度は累積させた面積のグラフ、つまり $y = H(x)$ そのもののグラフを描いてみよう。そうだ。もしも $y = H(x)$ が $y = \log_e(x+1)$ に似ているというなら、その差 $H(x) - \log_e(x+1)$ の値も調べてみよう。これはグラフ中にかっこで示す。

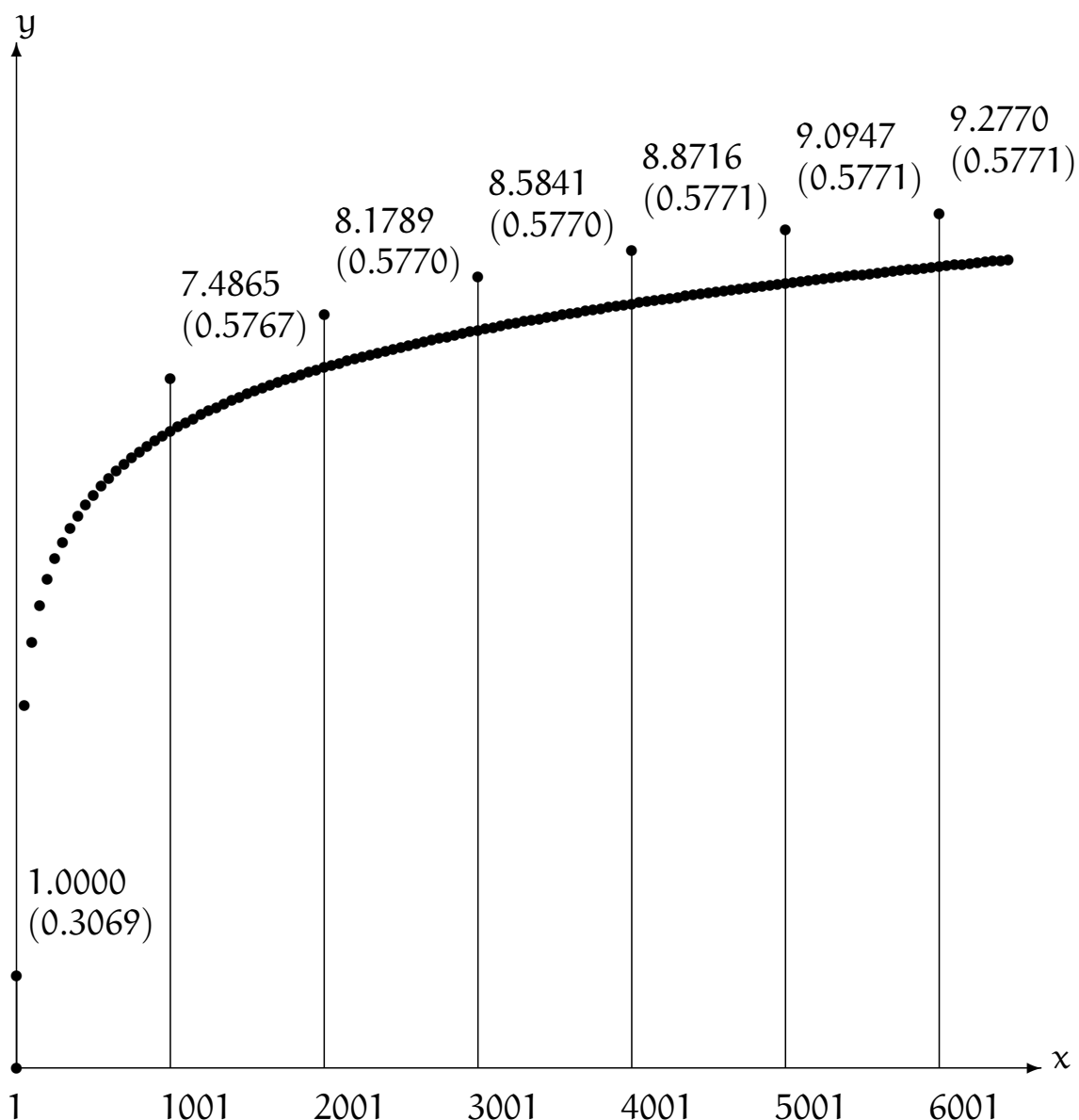


ふうん。まあ確かに傾向は似ているけれど、《ずれ》は 0.3069, 0.4014, 0.4470, 0.4739, と大きくなっていくばかりだな。納得がいかない。

ちょっと待てよ。《増え方はだんだん鈍くなる》んだよな。上のグラフでは、 $x = 1, 2, 3, \dots, 6$ しか調べていない。このグラフのずっと右の方はどうなっているんだろう。

スケールを変える

よし。グラフのスケールを変えて、たとえば、 $x = 1, 1001, 2001, \dots, 6001$ を調べてみよう。



へえ……グラフの右のほうはこうなっていたのか。さっき見ていた左端のあたりは、急激な増加の途中だったんだ。右に来るとだいぶ緩やかになっ

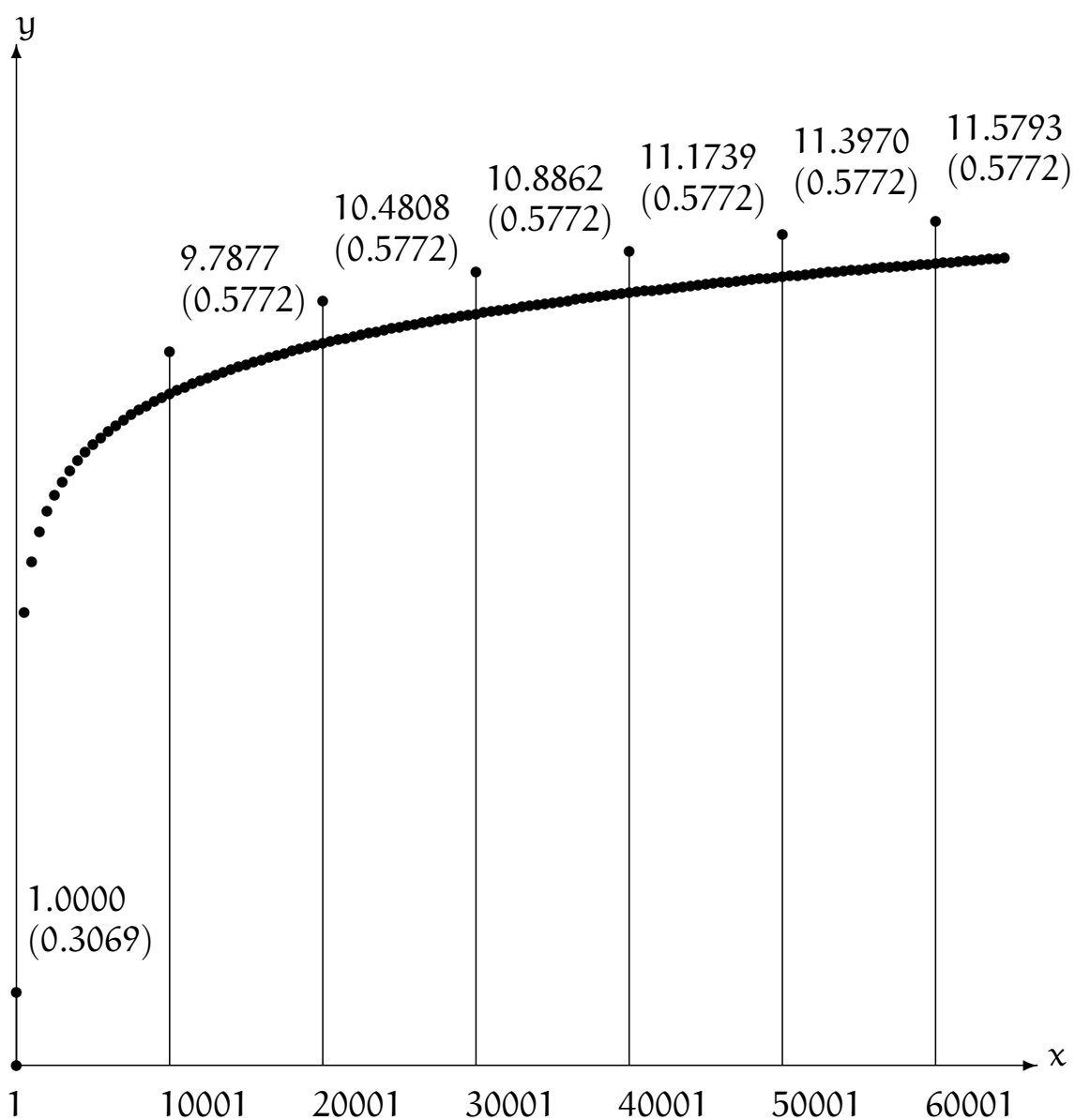
て、《ずれ》も 0.3069, 0.5767, 0.5770, 0.5770, 0.5771, 0.5771, 0.5771 と、安定してきている。これは確かに、調和数と対数関数が非常に似たカーブを描いているということじゃないか。ほぼ平行に上昇……。

……複数の音を《オクターブずらし》したまま平行に上昇させる……

なんだか、すごいな。

さらにスケールを変える

では、もっと右のほう…… $x = 1, 10001, 20001, \dots, 60001$ を調べてみよう。



ふうん。グラフの形はそれほど変わらないんだな。ということは、さっきの 1001 のあたりも実は急激な増加だったんだ……。すべてはスケールをどう取るか、か。

《ずれ》はしだいに $0.5772\dots$ に近づいていくように見える。しかし、おもしろいな。x が非常に大きいときには次の式が成り立つということか。

$$H(x) \doteq \log_e x + 0.5772\dots \text{ 程度のずれ}$$

よし、まとめよう。n が非常に大きいとき、調和数 H_n は、対数関数 $\log_e n$ と非常に似た変化をする。ミルカさんの問題への解答としては——離散的な世界の調和数 $H(x)$ に対応する、連続的な世界の関数 $h(x)$ は対数関数である（もともと《ずれ》の正体は気になるけれど……）。

$$\begin{array}{ccc} \text{離散的な世界} & \longleftrightarrow & \text{連続的な世界} \\ H(x) = \sum_{k=1}^x \frac{1}{k} & \longleftrightarrow & h(x) = \log_e x \end{array}$$

8 未知の扉

「……だから、《調和数は離散的な世界の対数関数のようなもの》ということがわかった」

いつもの帰り道。僕は、テトラちゃんと並んで駅へ向かいながら、ミルカさんの問題と僕の成果をかいつまんで話した。

「考えてみれば、オレームの証明をよく検討していれば気がつけたんだよ。ほら、 $H_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ が発散することを証明するとき、1 個、2 個、4 個、8 個と、項を 2^m 個ずつグループにしていたよね。ということは、集めていた項の個数は指数的に増加するわけだ。そのあたりから、調和数が、指数関数の逆関数である対数関数に似ている可能性に気づいてもよかった」あの

ときグラフを描かなかったのは、かえすがえすも痛い。ミルカさんの指摘通りだ。

テトラちゃんは僕の話に興味深そうに聞いていたけれど、なぜか急にしょんぼりしてしまった。

「……先輩。あたし、《研究課題やってみたいです》なんて大見^{おおみ}得^え切りましたけれど、結局のところぜんぜん《おもしろいもの》を見つけることはできませんでした。ぜんぶ、先輩に教えてもらっておしまいです。あたし、やっぱり数学だめですね」

「いや、それは違うよ」と僕は言う。

「テトラちゃんは、自分で考えようとしたらどう？ それは大事なことだ。自分の頭で考えようと思い、実際に考える。それはとても大事なことだ。たとえ、何も見つけられなかったとしても。けんめいに考えたからこそ、その後、僕が話した内容がすぐに理解できたんだ」

テトラちゃんはじっと聞いている。

「きみは数式を何とか読もうとする。それはすごいことだよ。数式が出てきたとたん思考停止する人はとても多い。数式の意味を考える以前に、そもそも読もうとしないんだ。もちろん、難しい数式の意味はわからないことが多いだろう。でも、全部はわからないとしても《ここまではわかった。ここからわからない》と筋道立てて考えるべきなんだ。《だめだ》と言ってたら読まなくなる。考えなくなる。数学なんて役に立たないさって嘯^{うそぶ}くこともできるけれど、そのうちに《役に立たないから読まない》ではなく《役に立てたくても読めない》になってしまうだろう。数学を、酸^すっぱいブドウにしてはだめだ。チャレンジするテトラちゃんはとてもえらいよ」

「でも……先輩が問題を作ったり解いたりしているのを見ると、なるほどって思うんですが、あたしには、できそうにありません。どうやったらできるようになるのか、頭のどこから取り出せばいいのか……すごく不思議です」

「でもね、僕にしても、本当の意味で新しいことを思いついているわけじゃ

ない。どこかで読んだものや、過去に解いたことがベースになっている……
と思う。授業で習った問題、自分で考えた課題、本に載っていた例題、友人
と議論した解法……それらが僕の中でいつの間にか力になっているんだ。宝
物を見つけ出す力、掘り出す力になっている」

僕はさらに続ける。

「問題を解くときの心の動きは、不等式を使って数式の大きさを評価する
のに似ている。いきなり等式で答えがびしっと見つかるとは限らない。《いま
わかっていることから判断すると、答えはこれよりは大きいけれど、これ
よりは小さいはず……》などと考える。これまで自分が知り得た手がかりを
元にして、少しずつ答えに近づくんだ。すべてが一気にわかるとは限らな
い。わかったところに楔くさびを打ち込み、槌てこ子を使ってぐいと扉を開けるん
だよ。未知の扉を」

テトラちゃんの目が輝く。

「勉強しながら、自分の中に《なるほど》という実感を積み重ねていこう。
自分で思いつかなくてもいい。すばらしい証明を読んで《これはすごい》と
感動する経験も大事だよ」

「ええ、何だかわかります。英語を勉強していて、ネイティブの美しい発
音を聞いて、あたしも、こう発音できたらなあ、って思いますから。……そ
れにしても、先輩。あたし——先輩のお話をうかがっていると、何だか……
何だかとても元気が出てきます。あたし、あたし、ほんとうに……」

話しながら、彼女の歩みはますます遅くなる。いつもバタバタ元気なテト
ラちゃんなのに、なぜか帰り道だけはゆっくり歩くのだ。

僕たちはしばらく黙って歩く。

「あ、そうだ。今度の土曜日、プラネタリウムに行かない？」

「え……先輩と？ プラネタリウム？ あたしが？」テトラちゃんは人差し
指を自分の鼻に当てる。

「都宮つのみやから無料券ただもらったんだ。意外に見応えみごたあるってさ。あまり好き

じゃない？」

「大好きです！ 行きます！ う、うわ……すっごく嬉しいです。先輩！ あ——でも《あの方》をお誘いしなくて良いんですか？ あの……ミルカさん」

「ああ、そうだね。もしテトラちゃんの都合が悪いなら、ミルカさんを誘おうかな」

「い、いえっ！ 都合わるくないですっ！ 絶対いきますっ！」

9 世界に素数がふたつだけなら

世界に人間がたった二人しかいないなら、人間の悩みはずいぶん減るんじゃないだろうか。人間が多すぎるから、比べて落ち込んだり、争ったりするんじゃないだろうか。たとえば、アダムとエバのようにたった二人しかいなかったら、トラブルは起きないんじゃないだろうか。いや、アダムとエバだけのときもトラブルはあったか。でも、そのときはヘビがいた。本当に二人しかいなかったら、問題は起きなかっただろうか。いや、やはり起きたかもしれない。それに、はじめは二人でも、遅かれ早かれ増えることになる。そうすれば、豊かなバリエーションが生まれると同時に、悩みも生まれるかもしれないし——。

「何を考えているのかな」とミルカさんが聞いた。

「世界に人間が二人だけならどうなるか、について」と僕が答えた。

「ふうん。数学のノートを広げて？ ——じゃ《世界に素数がふたつだけなら》という話をしよう」

ミルカさんは、いつものように僕のノートを引き寄せて式を書き始める。

コンボリユーション

「順を追って話そう。まずは、次の形式的積を考える」

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots) \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots)$$

「この積は正の無限大に発散するけれど、はじめの何項かを展開して観察しよう」

$$2^0 3^0 + 2^0 3^1 + 2^1 3^0 + 2^0 3^2 + 2^1 3^1 + 2^2 3^0 + \dots$$

「指数の和によってグルーピングすると、パターンがはっきりする」

$$(2^0 3^0) + (2^0 3^1 + 2^1 3^0) + (2^0 3^2 + 2^1 3^1 + 2^2 3^0) + \dots$$

「すなわち、次の二重和で表現できる」

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k}$$

僕は式の展開に頷く。

「ミルカさん、これはコンボリユーションだね。外側の $\sum_{n=0}^{\infty}$ で、 n は $0, 1, 2, \dots$ と増える。そして、そのそれぞれに対して、内側の $\sum_{k=0}^n$ では、 2 と 3 の指数の和が n になる数を列挙している。いわば、 2 と 3 で指数を《分けっこ》して――」

「分けっこ？ ……ふうん、確かにそうも言えるね。さて、 2 または 3 だけを素因数に持つ正の整数は、この和のどこかに必ず一度だけ現れるよね。なぜなら、 2 と 3 の指数のところには、 0 以上の整数の任意の組み合わせが一度だけ現れるからだ」

「ふむ。なるほど。確かにそうだ」と僕は答えた。

収束する等比級数

「では、今度はこのような2つの無限級数の積を考えよう。名前を Q_2 としておく」

$$Q_2 = \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \cdot \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)$$

「さっきは正の無限大に発散する積だったけれど、今度は違う。なぜなら——？」ミルカさんは僕を見る。

「——なぜなら、この2つの無限級数は、収束する等比級数になっているから」と僕は受けて、式を書く。

$$\begin{aligned} Q_2 &= \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \cdot \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) \\ &= \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) \end{aligned}$$

「そう。では、収束することを念頭に置いて、さっきの無限級数の積 Q_2 を今度は頭から展開してみよう。すると分母には、さきほどの $2^k 3^{n-k}$ という形が出てくる」

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) \cdot \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots \right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2^0 3^0} \right)}_{n=0} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^0 3^1} + \frac{1}{2^1 3^0} \right)}_{n=1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^0 3^2} + \frac{1}{2^1 3^1} + \frac{1}{2^2 3^0} \right)}_{n=2} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k 3^{n-k}}
\end{aligned}$$

「以上、 Q_2 をふたつの方法で求めた。したがって、以下の等式が成り立つ」

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k 3^{n-k}}$$

「ふむふむ」

素因数分解の一意性

「さてここで、世界に素数が2と3のふたつしかないとしよう。すると、すべての正の整数は、 $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k 3^{n-k}}$ の分母 $2^k 3^{n-k}$ のどこかに必ず一度だけ現れる」

「え？ 2 または 3 だけを素因数に持つ正の整数しか現れないよ。たとえば 5 や 7 や 10 などとは？」

「だから、《素数が2と3のふたつしかないとしよう》って言ってるじゃないか。世界に素数が2と3しかなかったら、5 や 7 や 10 なんて整数はないんだ。何を言っているか、まだわからないかな」

「ふむ。素因数分解の一意性のことか。《すべての整数は素数の積で一意に書くことができる》ので、《世界に素数が2と3しかなかったら、5 や 7 な

んて整数はない》と言いたいんだね。でもね……《世界に素数がふたつしかない話》は、もうやめようよ。実りがない」

「わかった。やめようか。素数が二個だからいけないんだな。まあ、素数が二個しかないなんてことはありえないからね。ではこうしよう。世界に素数が M 個しかないと仮定する」

「いや、だから、だめだって。同じことだよ。2 個だろうが M 個だろうが、そんな仮定をしたら、素数が有限個だってことになるじゃないか」
「いや、ミルカさんは何を言っているんだろう。」

「いま《素数が有限個》と仮定したんだよ。まだ気がつかないかな」

にやにやしているミルカさんの表情で、僕は気がついた。

「背理法——か！」

素数の無限性の証明

「それではこれから素数は無数に存在するという命題を^{はいりほう}背理法を使って証明する」

ミルカさんはこう宣言して、まるで手術を始める外科医のように両手を広げる。

「ミルカさん。素数の無限性の証明というと、かのユークリッドの方法のこと？ 素数を有限個と仮定すると、すべての素数を掛けて 1 足した数もまた素数になって——」

と言いかけると、ミルカさんは手を伸ばして僕の口唇に指を触れ、言葉を封じた。

「素数が有限個だと仮定する」きっぱりした声でミルカさんは続ける。

「素数の個数を M 個としよう。すると、すべての素数は小さい順に $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_M$ と表せる。 p_k の最初の 3 個は $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ だよ。そこで、次のような積 Q_M を考える」

$$\begin{aligned}
Q_M &= \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \cdot \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) \cdots \left(\frac{1}{p_M^0} + \frac{1}{p_M^1} + \frac{1}{p_M^2} + \dots \right) \\
&= \prod_{k=1}^M \left(\frac{1}{p_k^0} + \frac{1}{p_k^1} + \frac{1}{p_k^2} + \dots \right) \\
&= \prod_{k=1}^M \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}
\end{aligned}$$

「要するに、さっきの Q_2 で 2 個だった素数を M 個にしたんだ。そして M 個の有限の値を掛けるのだから、 Q_M もまた有限の値になる」

僕は式を追って考える。

「ええと、ははあ、なるほど。そうだね。素数 p_k は 2 以上だから、無限等比級数 $\frac{1}{p_k^0} + \frac{1}{p_k^1} + \frac{1}{p_k^2} + \dots$ は $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$ に収束する。つまり有限の値ということか」

「そう。でね、ここからがおもしろいんだよ……」

ミルカさんはそう言って、細い舌を出して上唇をゆっくり舐める。

「さっき、ふたつの素数 2 と 3 で行ったのと同じことを M 個の素数で行う。つまり有限であることを念頭に置いて、具体的に展開するんだ。今回は指数を 2 個で《分けっこ》するのではなく、 M 個で《分けっこ》する——きみの用語を使えばね」

$$\begin{aligned}
Q_M &= \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \cdot \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) \cdots \left(\frac{1}{p_M^0} + \frac{1}{p_M^1} + \frac{1}{p_M^2} + \dots \right) \\
&= \prod_{k=1}^M \left(\frac{1}{p_k^0} + \frac{1}{p_k^1} + \frac{1}{p_k^2} + \dots \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum \frac{1}{2^{r_1} 3^{r_2} 5^{r_3} \dots p_M^{r_M}}
\end{aligned}$$

「こういう形の式になる」

「え、ええと……。最後の式の意味がよくわからない。特に内側の \sum には何も書いていないじゃないか」

「内側の \sum は、 $r_1 + r_2 + \dots + r_M = n$ を満たす、すべての r_1, r_2, \dots, r_M に関する総和になる」

「合計が n になるようなすべての組み合わせということかな？」

「そう。要するに、この Q_M は $\frac{1}{\text{素数の積}}$ という形をした項の和だよ。素数 p_k の指数を r_k と表して、すべての指数の和が n になるような組み合わせをすべて動かして、 $\frac{1}{\text{素数の積}}$ の和を取っているんだ。さて、ここで分母に注目する。すなわち《素数の積》の部分だよ。こうなっているね」

$$2^{r_1} 3^{r_2} 5^{r_3} \dots p_M^{r_M}$$

「さて、背理法の仮定から、世界に素数は M 個しかない。素因数分解の一意性から、すべての正の整数は $p_1^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3} \dots p_M^{r_M}$ の形に一意に素因数分解できる。ということは……。 Q_M を展開した各項の $\frac{1}{\text{素数の積}}$ の《素数の積》のところには、すべての正の整数が必ず一度だけ現れることになる」

「うんうん。これはさっきの 2 と 3 での議論と同じだね」

「要するに次の式が成り立つ」

$$Q_M = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

「あっ！」

「気がついたようだね」

「 Q_M は有限のはずなのに、発散してしまう」

「そうそう。はじめに、収束する無限等比級数を使って Q_M が有限であることを示した」

$$Q_M = \prod_{k=1}^M \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

「ところが、今度は Q_M が調和級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ に等しくなった」

$$Q_M = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

「つまり、次の等式が示されたことになる」

$$\prod_{k=1}^M \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

「左辺は、素数は有限個という仮定から有限の値になる。右辺は、調和級数だから正の無限大に発散する。これは矛盾だ」

「！」

「背理法の仮定《素数は有限個である》から矛盾が導けた。したがって仮定の否定、すなわち《素数は無数に存在する》が示された。証明終わり。Quod Erat Demonstrandum.」

ミルカさんは指をぴんと立てて宣言する。

「はい、これで、ひと仕事おしまい」

調和級数の発散が、素数の無限性の証明に結びつくとは……驚きだ。なんという宝物だろう。

「この素晴らしい証明は、《鷲が飛翔するごとく、人が呼吸するごとく、彼は計算をした》と言われている、私たちの師からの受け売りだよ」とミルカさんが言った。

「僕たちの師、とは？」

「18 世紀最大の数学者——レオンハルト・オイラーその人だよ」

ミルカさんは僕をまっすぐ見すえて言った。

10 プラネタリウム

土曜日。

プラネタリウムは、カップルや子供連れでいっぱいだった。僕とテトラちゃんは並んで席に着く。ドームの中央には奇妙な形をした黒い投影機が設置してある。

「先輩といっしょにプラネタリウムに来るなんて、ちょっと緊張です。今朝なんか、すごく早起きしちゃいました。へっへー」テトラちゃんは頭を掻く。

しばらくして照明が落とされ、夕焼けの風景がいっぱいに映し出される。日が落ちるにつれて、星がひとつ、またひとつと増えていく。いつしか夜空は大小さまざまの光点で満ちる。

「きれい……」

すぐ隣のテトラちゃんから溜息ためいきが漏れた。確かに、これはきれいだ。

——それではこれから、北極点へ向けて飛び立ちましょう——

アナウンスと同時に全天空がゆさぶられ、いっせいにすべての星々が流れ始めた。本当に空に浮かび上がった錯覚にとらわれ、僕たちは思わず身を固くする。あっという間に北極点に到着だ。

「オーロラ！」どこかで子供が声を上げる。

ほのかな光が、厚みを増し、カーテンを形作る。うねるようなグラデーションが幾重にも絡み合い、僕たちを取り囲む。観客もすっかり静まって、光のハーモニーに浸っている。

いつもの世界、いつもの時間から切り離され、僕とテトラちゃんは二人で

北極点にやってきた。遠く離れた世界、遠く離れた時間にやってきて、いっしょに宇宙を見上げる。それは、懐かしい美しさ。ああ、ずっと探していたものはここにあったんだ。そんな、美しい懐かしさ。

と、あてもない思いを巡らせていたとき――

僕の心臓がどきり、と鳴った。

右腕に、テトラちゃんの重みを感じたからだ。

彼女は、僕のひじのあたりをそっと抱え、体を寄せ、体重を預けている。くすぐったいような、いつもの甘い香りが強くなる。そして、ふんわりとやわらかい――

夜空はオーロラに包まれ、僕はテトラちゃんに包まれる。

テトラちゃん……。

北極点から見える星座、地軸の傾き、それから白夜についての解説が続いていたようだけれど、僕の頭には何も残らない。

空には星が浮かび、心にはテトラちゃんの姿が浮かぶ。名前を呼ぶと顔を輝かすテトラちゃん。バタバタするテトラちゃん、真剣な表情のテトラちゃん。納得するまでじっくり考え、でもうっかりミスするテトラちゃん。一途で、ひたむきで、元気いっぱいテトラちゃん。

そんなテトラちゃんが、僕のことを――？

僕は、もう、何を考えているかわからなくなる。

気持ちがぴったりと一致することはありえないけれど、一致していると見なせるほどにじゅうぶん近づくことはできるのかな。たっぷり時間をかけるなら――漸化式のような歩みでも。

僕たちは、現在という限られた時を共有している。見えるものはほんのわずか、知り得ることはほんのわずかだ。けれども、僕らは無限を捕まえる。捕まえようとする。見つけたものを手がかりに。知り得たことを梃子にして。僕たちに翼はない。しかし僕たちには言葉がある。

……そのまま、どれほどの時間が過ぎただろう。やがて、天空のオーロラ

が吹き払われて消えていき、ガイドンスの落ち着いた声が、とまどう僕を現実
に引き戻す。

——さて、いつもの町へ戻って来ました。しばしの旅、お楽しみいただけ
たでしょうか——

場内が明るくなる。無数の星々が白いライトに飲み込まれて消える。い
ままで星で満ちていた天球は、多面体で近似されたスクリーンへと姿を変
える。

ファンタジーから引き戻された観客たちは、なごり惜しそうに、でもどこ
かほっとする。咳払い。背伸び。帰り仕度。みなは、思い思いに日常へ回帰
する。

でも。

でも、僕は、まだテトラちゃんに捕えられたままだ。僕たちは、北極点に
残っている。遠い世界。北の果て。オーロラの下^{もと}に。

ええと——なんて声をかけたらいいんだろう。僕は、ゆっくりと、彼女の
ほうを向く。

「テトラちゃん……テトラちゃ……あれ？」

テトラちゃんは僕にもたれたまま、眠っていた。

しかも、ぐっすりと。

「テトラちゃんとハーモニック・ナンバー」終

読者のみなさんへ

こんにちは、結城浩です。

この『テトラちゃんとハーモニック・ナンバー』は、ミルカさんシリーズの第6作目になります。

今回は、調和級数、調和数、ゼータ関数、オイラー積表示、そして調和級数の発散を使った素数の無限性の証明……と、盛りだくさんの内容でした。

文中で「僕」が研究していた《ずれ》は $n \rightarrow \infty$ で、Euler-Mascheroni 定数 γ に収束します。参考文献 [4] によれば、以下の式が成り立ちます。

$$H_n = \log_e n + \gamma + \frac{1}{n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \epsilon$$
$$(0 < \epsilon < \frac{1}{256n^6}, \gamma = 0.5772156649 \dots)$$

また、ミルカさんが使っていた《ゼータ関数のオイラー積表示》は、整数論でたいへん重要な役割を果たします。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_{\text{素数 } p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

この文章の PDF ファイルは、以下の URL から入手できます。結城へのフィードバックも下記ページから送ることができますので、ぜひみなさんのご感想をお聞かせください。

テトラちゃんとハーモニック・ナンバー

<http://www.hyuki.com/girl/harmonic.html>

Copyright (C) 2006 Hiroshi Yuki (結城浩)

All rights reserved.

更新履歴

- 2006 年 1 月、執筆開始。
- 2006 年 4 月、公開。参考文献 [6] を追加。

主な数式

部分和 (partial sum) $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

無限級数 (infinite series) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

調和数 (harmonic number) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

調和級数 (harmonic series) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$

ゼータ関数 (Riemann's zeta function) $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$

ゼータ関数と調和級数 $\zeta(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

ゼータ関数とオイラー積 $\zeta(s) = \prod_{\text{素数 } p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$

For all n in $\mathbb{N} \dots \forall n \in \mathbb{N} \dots$

There exists n in \mathbb{N} such that $\dots \exists n \in \mathbb{N} \dots$

参考文献

- [1] 松本耕二, 『リーマンのゼータ関数』, ISBN4-254-11731-0, 2005 年.
リーマンのゼータ関数について書かれている本です。対象読者は大学院生以上。第 1 章に書かれている、14 世紀フランスのニコル・オレーム (Nicole d'Oresme, 1323?-1382) による調和級数が発散することの証明と、オイラーによる $\zeta(\sigma)$ の無限積表示・素数の無限性の証明などを参考にしました。
- [2] 田崎 晴明, 『数学 — 物理を学び楽しむために —』, <http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/mathbook/>
物理を学ぶ人のための数学の教科書です。PDF ファイルが公開されています。第 2 章に書かれている「掛け合い漫才のような収束」を参考にしました。
- [3] 志賀浩二, 『極限の深み 数学が育っていく物語 1』ISBN4-00-007911-5, 1994 年.
数列と無限級数についてやさしく解説した読み物です。対象読者はおそらく高校生以上。素数の無限性の証明 (p. 132-134)、ゼータ関数のオイラー積表示 (p. 134-136) などを参考にしました。
- [4] Donald E. Knuth, 『The Art of Computer Programming Volume 1 日本語版』 ISBN4-7561-4411-X, 株式会社アスキー, 2004 年.
アルゴリズムのバイブルと呼ばれている歴史的な教科書です。「1.2.7. 調和数」を参考にしました。 n が大きいときに H_n が対数関数的な振る舞いをすることを確かめる問題が演習問題 7 (p. 75) にあります。
- [5] <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Euler.html>
レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler, 1707-1783) の簡単な紹介が書かれているページです。オイラーに関するミルカさんの

台詞は、このページで引用されていた文を元にしています。

“He calculated just as men breathe, as eagles sustain themselves in the air” (by François Arago)

“Read Euler, read Euler, he is our master in everything” (by Pierre Laplace)

- [6] ダグラス・R・ホフスタッター, 『ゲーデル, エッシャー, バッハ——あるいは不思議の環』, ISBN4-8269-0025-2, 株式会社白揚舎, 1985 年.

ゲーデル、エッシャー、バッハという三人をモチーフに、自己言及、再帰性、知識表現、人工知能などについて述べられている読み物です。なお、『20 周年記念版』が白揚社から ISBN4-8269-0125-9 として出版されています (2005 年)。ミルカさんとエイエイの無限上昇の無限音階に関して、第 20 章の終わりにある「シェパード音階」を参考にしました。「種明かししたらあかんやん」いいんです。

- [7] 結城浩, 『プログラマの数学』, ソフトバンククリエイティブ, ISBN4-7973-2973-4, 2005 年.

プログラミングに役立つ「数学的な考え方」を学ぶ入門書です。論理、数学的帰納法、順列・組み合わせ、背理法についても解説されています。この『テトラちゃんとハーモニック・ナンバー』よりはずっと易しい内容です :-)

- [8] 結城浩, 「数学ガール」, <http://www.hyuki.com/girl/>

数学と少女が出てくる読み物を集めているページです。以下の「ミルカさんシリーズ」はこのページからすべてたどることができます。

ミルカさんシリーズ

1. 『ミルカさん』 (2004 年)

2. 『ミルカさんの隣で』 (2005 年)
3. 『ミルカさんとフィボナッチ数列』 (2005 年)
4. 『テトラちゃんと相加相乗平均』 (2005 年)
5. 『ミルカさんとコンボリユーション』 (2006 年)
6. 『テトラちゃんとハーモニック・ナンバー』 (2006 年)