アーベル群であることと逆元を得る写像が群準同型であることの同値性の証明

結城浩 *

2015 年 3 月 28 日

命題　群 G に対して、逆元を得る写像を f とする。すなわち、写像 $f : G \to G$ で、群 G の任意の元 g に対して $f(g) = g^{-1}$ とする。このとき、

$$\text{写像 } f \text{ が群準同型} \iff G \text{ はアーベル群}$$

が成り立つ。

証明

($\Longrightarrow$ の証明)　以下、群 G での積を $\circ$ で表す。写像 f は群準同型であるから、群 G の任意の 2 元 a, b に対して、

$$f(f(b) \circ f(a)) = f(f(b)) \circ f(f(a)) = (b^{-1})^{-1} \circ (a^{-1})^{-1} = b \circ a$$

が成り立つ。ところで一般に $(b^{-1} \circ a^{-1})^{-1} = a \circ b$ であるから、

$$f(f(b) \circ f(a)) = a \circ b$$

が成り立つ。したがって、$b \circ a = a \circ b$ がいえ、G はアーベル群である。

($\Longleftarrow$ の証明)　群 G がアーベル群なら、G の任意の 2 元 a, b に対して、$a \circ b = b \circ a$ だから、

$$f(b \circ a) = f(a \circ b)$$

である。ところで一般に $(b \circ a)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1}$ であるから、

$$f(b \circ a) = f(a) \circ f(b)$$

がいえる。したがって、

$$f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$$

が成り立ち、写像 f は群準同型である。　（証明終わり）

* http://www.hyuki.com/mathinfo/

この問題は群論 bot（@GruppenTheoBOT）のツイートをもとにしている。
https://twitter.com/GruppenTheoBOT/status/581412673901858816