

# ミルカさんとフィボナッチ数列\*

結城浩†

2005年10月

書籍版『数学ガール』の最新情報は、<http://www.hyuki.com/girl/>を参照してください。

---

\* <http://www.hyuki.com/story/genfunc.html>

† <http://www.hyuki.com/> Hiroshi Yuki © 2005, All rights reserved.

# 1 図書室

高校二年の秋。僕は、放課後の図書室で後輩の女の子に数学を教えていた。簡単な式の展開だ。

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= (a + b)a - (a + b)b \\ &= aa + ba - ab - bb \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

僕は、式  $(a + b)(a - b)$  を  $a^2 - b^2$  に展開してみせた後、和と差の積は2乗の差って覚えればいいよと説明した。後輩の女の子は「よくわかりました。先輩って説明がとっても上手なんですね」と言った。

そこへミルカさんが近づいてきて、後輩の椅子を思いっきり蹴飛ばした。ものすごい音がして、図書室にいた学生がみな顔を上げた。後輩はびっくりして立ち上がり、ミルカさんをにらんでから図書室を出て行った。僕はぽかんとして彼女を目で追いかけた。

ミルカさんは何事もなかったかのように僕の隣に座り、ノートを見て言った。

「式の展開？」

後輩から質問されたから教えていたんだ、と僕は言った。

ミルカさんは「ふうん」といって、シャープペンシルをくるっと回した。

「ねえ、パターン探しをしようよ」

ねえ、パターン探しをしようよ。スタートはこんな式から。

$$\begin{aligned}
(1-x)(1+x) &= 1 \cdot (1+x) - x \cdot (1+x) \\
&= (1+x) - (x+x^2) \\
&= 1 + (x-x) - x^2 \\
&= 1 - x^2
\end{aligned}$$

これはさっきの式  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  の特殊な場合だよね。ここで、式  $(1-x)(1+x)$  の  $(1+x)$  を、 $(1+x+x^2)$  に代えてみるよ。これが次の一歩。

$$\begin{aligned}
(1-x)(1+x+x^2) &= 1 \cdot (1+x+x^2) - x \cdot (1+x+x^2) \\
&= (1+x+x^2) - (x+x^2+x^3) \\
&= 1 + (x-x) + (x^2-x^2) - x^3 \\
&= 1 - x^3
\end{aligned}$$

要するに、左端と右端だけが残り、途中の項はすべてプラスとマイナスでばっさり消える。そう考えると、もう一般化できるね。

$$\begin{aligned}
(1-x)(1+x) &= 1 - x^2 \\
(1-x)(1+x+x^2) &= 1 - x^3 \\
(1-x)(1+x+x^2+x^3) &= 1 - x^4 \\
(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4) &= 1 - x^5 \\
&\dots \\
(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots+x^n) &= 1 - x^{n+1}
\end{aligned}$$

点々 (...) がうるさいから、 $\sum$  を使うね。

$$(1-x) \sum_{k=0}^n x^k = 1 - x^{n+1}$$

こうなる。ここで、整数  $n$  の範囲は  $n \geq 0$  だよ。そう、 $n = 0$  のときも成り立つから楽しい。こうだよな。

$$(1-x) \sum_{k=0}^0 x^k = 1 - x^1$$

なるほど、と僕は思った。でも、それほど面白くはない。まあ、ありがちな式の展開と一般化だ。ミルカさんも「まあ、ここまではありがちよね」と言って、先を続ける。そういえば、さっき椅子を蹴飛ばされた女の子はどうしただろう、と僕は思う。それにしてもミルカさんは……。

まあ、ここまではありがちよね。次はどっちに進もうかな。  
さっき得た式をもう一度書くな。

$$(1-x) \sum_{k=0}^n x^k = 1 - x^{n+1}$$

ここで、左辺を  $\sum$  だけにするため、両辺を  $1-x$  で割ってみる。0 で割るのを防ぐため、 $1-x \neq 0$  ということにする。

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

さっきまでは「積を求める公式」めいていたけれど、今度は「和を求める公式」に見える。ところでこれはどこかで見た式だよ。知っているよね。

僕は、等比数列の第  $n$  項までの和だ、と答える。ミルカさんは「その通り」と応じる。

その通り。ただし、初項を第0項と呼ぶならね。初項を第0項と呼ぶなら、この式は等比数列の第n項までの和になる。初項が1で、公比がrとすると、等比数列は  $\langle 1, r, r^2, r^3, \dots, r^n, \dots \rangle$  で、第0項から第n項までの和は、

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n &= \sum_{k=0}^n r^k \\ &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

となる、と。

さて、次はどこに進もうか。

僕は、極限  $n \rightarrow \infty$  を考えるのが自然かな、といいながら、収束するための  $r$  の条件を考える。絶対値が1未満か。

そうね。  $|r| < 1$  のとき、極限  $n \rightarrow \infty$  で和  $\sum_{k=0}^n r^k$  は収束して、次のようになる。

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + r^3 + \dots &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n r^k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \\ &= \frac{1}{1 - r} \end{aligned}$$

これで無限等比級数が得られた。  $|r| < 1$  の条件は、極限を取るときに  $r^{n+1}$  が0につぶれるところに効いてくるんだね。  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$  を  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  と書くことにすると、こうなる。

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad \text{ただし} \quad |r| < 1$$

この式はとても面白い。左辺は無限に続く数列の和になっている。すべての項を明示的に書き表すことはできない。それに対して、右辺は分数 1 つの小さな式だ。無限に続くものを分数  $\frac{1}{1-r}$  という 1 つの式に閉じ込められるなんて、面白い。

確かに、面白いといえば面白い。

もう窓の外はだいぶ暗くなってきた。図書室に残っているのも、僕とミルカさんだけだ。ミルカさんは調子が出てきたらしく、僕の反応も待たずに、自問自答しながらどんどん話を続ける。

ここから  $r$  ではなく  $x$  で書いて、関数らしくするね。今後は面倒だから収束する条件は省略。さっきはこんな関数を考えていた。

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

いま、この関数の係数に注目する。係数は  $\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$  という無限数列になっている。こういう対応関係を考えるということね。

$$\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

つまり、 $\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$  という無限数列と  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  という関数を同一視するということ。 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$  だから、次のように言い換えてもよい。

$$\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-x}$$

さてと、さっきは等比数列  $\langle 1, r, r^2, r^3, \dots \rangle$  を考えたけれど、あれに対応する関数はどうなるかな。  $r^k$  が  $x^k$  の係数になるんだから、こうなるよね。

$$\langle 1, r, r^2, r^3, \dots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad 1 + rx + r^2x^2 + r^3x^3 + \dots$$

ところで、  $1 + rx + r^2x^2 + r^3x^3 + \dots$  は  $x$  の閉じた式で表せるだろうか。もちろん、表せる。  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$  の  $x$  を改めて  $rx$  にすれば良いだけのことだからね。

$$1 + rx + r^2x^2 + r^3x^3 + \dots = \frac{1}{1-rx}$$

つまり、こういう対応関係が得られたわけだ。

$$\langle 1, r, r^2, r^3, \dots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-rx}$$

数列と関数を対応付けるということを、一般化して書くと、こうなる。

$$\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle \quad \longleftrightarrow \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

これは、無限次元のベクトルを、1つの関数に対応付けて…。

そこでミルカさんは出し抜けに言葉を切った。黙ったまま、ちよつと眉間にしわを寄せて目を閉じる。ゆっくりと呼吸をして、何かを深く考えているようだ。

僕は邪魔をしないように、静かにミルカさんを見る。ミルカさんの形のよい唇。数列と対応付けられた関数。メタルフレームの眼鏡。無限等比級数の閉じた式。

ミルカさんが、目を開く。

「無限数列が与えられたときに、それに対応する関数を考えたよね」とミルカさんは、優しい声で話し始める。「関数の閉じた式が求められるんなら、無限数列はそれとも対応付けられる」

「でね、ちょっと考えたんだけど……」と言いながら、ミルカさんの声はだんだん小さくなる。まるで、決して他人に知られてはならない宝物の場所でも話し始めるかのように、顔を僕に近づける。かすかな柑橘系の匂い。

「これから、道を反対方向にたどってみようと思うんだ」とミルカさんはささやく。

僕は秘密の言葉を聞き逃さないように、真剣に耳をそばだてる。反対方向？

「つまり、無限数列から関数へ対応が付くのなら、関数を使って無限数列を捕まえることができないかな、ということなの」

「もう下校時間です」

後ろから大きな声が出て、僕たちはびっくりした。顔を寄せて熱心に話し込んでいた僕たちは、後ろに司書の先生が立っていることにまったく気づかなかったのだ。

## 2 フィボナッチ数列を捕まえる

僕たちは近くの喫茶店に移動した。注文もそこそこに、僕たちは数列の話続ける。

無限数列を捕まえるって、いったいどういうこと？

無限数列を捕まえる、というのは比喩が飛び過ぎたかな。関数を使って、無限数列の一般項  $a_k$  の閉じた式が得られないかな、ということ。

たとえば、無限数列としてフィボナッチ数列を考えてみよう。

もちろん、フィボナッチ数列は知っているよね。〈0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...〉  
っていう数列。隣接した2つの項を足したものが次の項になる。

0, 1, 0+1=1, 1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8, ...

という具合。

フィボナッチ数列の一般項を  $a_k$  とすると、 $a_0$  は0で、 $a_1$  は1で、  
 $k \geq 2$  のとき  $a_k = a_{k-2} + a_{k-1}$  となる。

$$a_k = \begin{cases} 0 & (k=0) \\ 1 & (k=1) \\ a_{k-2} + a_{k-1} & (k \geq 2) \end{cases}$$

もちろん、この<sup>ぜんかしき</sup>漸化式があれば、フィボナッチ数列を順番に書き下  
していくことはできる。それに「隣接した2つの項を足したものが  
次の項になる」という性質もはっきりしている。でも、 $a_k$  を  $k$  の閉  
じた式では表していない。これが、私のいう「捕まえていない」状態  
なの。

漸化式は分かっているけれど、一般項  $a_k$  が  $k$  の閉じた式で表せて  
いない。ということは、「フィボナッチ数列の第1000項は何？」とい  
う問いに答えようとする、0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... と順番に計算してい  
く必要がある。これはつまらない。何とかして、フィボナッチ数列の  
一般項  $a_k$  を  $k$  の閉じた式で表したいの。

では、フィボナッチ数列に対応する関数を  $f(x)$  と呼ぶことにする。  
つまり、こういうこと。

$$\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle \longleftrightarrow f(x)$$

$f(x)$  を具体的に書いたら、こうね。

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \dots \\
&= 0x^0 + 1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \dots \\
&= x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \dots
\end{aligned}$$

いま、 $f(x)$  の性質を調べたい。どんな面白いことがいえるだろう。係数  $a_k$  はフィボナッチ数列なんだから、そのことをうまく生かすと、関数  $f(x)$  について面白いことがいえそうな気がする。

フィボナッチ数列の性質といえば、もちろん漸化式  $a_{k-2} + a_{k-1} = a_k$  だ。これをうまく使う必要があるはず。この 3 つの係数が出てくるように式を書いてみよう。

$$f(x) = \dots + a_{k-2}x^{k-2} + a_{k-1}x^{k-1} + a_kx^k + \dots$$

係数  $a_{k-2}$  と  $a_{k-1}$  を足したいんだけど、 $x$  の次数がずれているから足せない。さあ、どうする？

「さあ、どうする？」とあって、ミルカさんは僕を見る。

うーん。次数がずれているのは当然だ。だって、無限数列の各項が混ざらないようにするために  $x$  の次数を違えているのだから。無限数列に関数を対応付けたからといって、何か面白いことが起こるのだろうか。僕は式を見つめるけれど、うまい考えは浮かばない。

### 3 閉じた式を求めて

ミルカさんは、考え込んでいる僕をしばらく見ていたが、やがて、「実は、簡単よ」と軽い調子で切り出した。

実は、簡単よ。

$x$  の次数がずれているなら、ずれている分だけ  $x$  を掛けてやればいい。たとえば、 $a_{k-2}x^{k-2}$  なら  $x^2$  を掛ければ  $a_{k-2}x^k$  になるよね。だから、こう考える。

$$\begin{aligned}x^2 \cdot a_{k-2}x^{k-2} &= a_{k-2}x^k \\x^1 \cdot a_{k-1}x^{k-1} &= a_{k-1}x^k \\x^0 \cdot a_{k-0}x^{k-0} &= a_{k-0}x^k\end{aligned}$$

これで、フィボナッチ数列の漸化式が使える形に持っていきそうね。 $f(x)$  に  $x^2, x^1, x^0$  をそれぞれ掛けた式を書いて観察してみようよ。

$$\begin{aligned}\text{式 1: } x^2 \cdot f(x) &= a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + a_3x^5 + a_4x^6 \\ \text{式 2: } x^1 \cdot f(x) &= a_0x^1 + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + a_5x^6 \\ \text{式 3: } x^0 \cdot f(x) &= a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6\end{aligned}$$

オーケー、次数がそろった。この三式を使って、式 1 + 式 2 - 式 3 という計算をすると、次の式を得る。

$$(x^2 + x^1 - x^0)f(x) = \underbrace{-a_0x^0 + a_0x^1 - a_1x^1}_{\text{残る項}} + (a_0 + a_1 - a_2)x^2 + \cdots + (a_{k-2} - a_{k-1} + a_k)x^k$$

$x^0$  の項と  $x^1$  の項を残して、あとはばっさり消える。フィボナッチ数列の漸化式を使えば、 $a_{k-2} + a_{k-1} - a_k$  の値は 0 になるからだね。

もう  $x^0$  や  $x^1$  というくどい書き方はせず、1 や  $x$  と書くよ。それから、 $a_0 = 0$  と  $a_1 = 1$  も使おう。すると、次の式を得る。

$$(x^2 + x - 1)f(x) = -x$$

これでやっと  $f(x)$  の閉じた式を得ることができた。これが、 $f(x)$  の姿よ。

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

複雑そうなフィボナッチ数列がこんなに短くてシンプルな式になったのはとてもうれしい。だって、この式の中には無限に続くフィボナッチ数列の情報がすべて詰まっているはずだもの。

$$\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots \rangle \longleftrightarrow \frac{x}{1-x-x^2}$$

ここまでで、いったい何ができたかを整理するよ。フィボナッチ数列を係数に持つ関数  $f(x)$  を考えてきた。 $f(x)$  は  $\frac{x}{1-x-x^2}$  という閉じた式を持つ。だからもしも、 $\frac{x}{1-x-x^2}$  を  $x$  の無限級数で明示的に表せたとすると、その  $k$  次の係数はフィボナッチ数列の第  $k$  項  $a_k$  になっているはず。

では、次の目標は、

$$\frac{x}{1-x-x^2}$$

を何とかして無限級数で表すことね。

私たちは、分数の形になっている式を無限級数にしたことがあるわ。ほら、あれよ、あれ。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

あるいは、

$$\frac{1}{1-rx} = 1 + rx + r^2x^2 + r^3x^3 + \dots$$

でもいいけれど。

ともかく、式  $\frac{x}{1-x-x^2}$  を何とかして、 $\frac{1}{1-x}$  あるいは  $\frac{1}{1-rx}$  に似ている形に持っていくことはできないかしら。これが、最後の突破口になりそうなんだけれど。どうかな？

「どうかな？」とミルカさんは僕を見る。

そうか。あとは、式  $\frac{x}{1-x-x^2}$  を無限級数の形にしさえすれば、フィボナッチ数列の一般項を得たことになるのか。

## 4 解決へ

僕はミルカさんが示した式をじっと見る。 $\frac{x}{1-x-x^2}$  を  $\frac{1}{1-rx}$  という形で表せないか。 $1-x-x^2$  は二次式で  $1-rx$  は一次式だから、とりあえず、 $1-x-x^2$  を因数分解してみるか。僕はノートに計算を進める。ミルカさんは僕の計算を見ている。

$1-x-x^2$  が次のように因数分解できたとしよう。

$$1-x-x^2 = (1-rx)(1-sx)$$

ここで  $r, s$  は定数とする。そして、次のような式を考える。

$$\frac{1}{1-rx} + \frac{1}{1-sx}$$

通分したときにちょうどつじつまが合うようにするんだ。この式を計算して、 $\frac{x}{1-x-x^2}$  になるように、 $r, s$  を決めればいいはずだ。計算してみよう。

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-rx} + \frac{1}{1-sx} &= \frac{1-sx}{(1-rx)(1-sx)} + \frac{1-rx}{(1-rx)(1-sx)} \\ &= \frac{2-(r+s)x}{1-(r+s)x+rsx^2} \\ &= \dots \end{aligned}$$

うーん、分母は  $r, s$  をうまくとれば  $1 - x - x^2$  にできるけれど、分子の定数項 2 は消えない。惜しいけれど、だめだ。うーん。

僕がうなっていると、ミルカさんは「こうすれば、うまく行くよ」と答えた。

こうすれば、うまく行くよ。

分子にもパラメータを入れる。つまり、 $R, S, r, s$  という四個の定数を導入して、こんな式を考える。

$$\frac{R}{1 - rx} + \frac{S}{1 - sx}$$

計算する。

$$\begin{aligned} \frac{R}{1 - rx} + \frac{S}{1 - sx} &= \frac{R(1 - sx)}{(1 - rx)(1 - sx)} + \frac{S(1 - rx)}{(1 - rx)(1 - sx)} \\ &= \frac{(R + S) - (rS + sR)x}{1 - (r + s)x + rsx^2} \end{aligned}$$

さっき定数だった 2 は、今度は  $R + S$  になってくれるから、次式がなりたつように四個の定数を定めればよいよ。

$$\frac{(R + S) - (rS + sR)x}{1 - (r + s)x + rsx^2} = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

つまり、こうなればいってことね。

$$\begin{cases} R + S = 0 \\ rS + sR = -1 \\ r + s = 1 \\ rs = -1 \end{cases}$$

4 個の未知数に 4 個の独立な式。この連立方程式を解いてみよう。  
あとは手の運動だね。

まずは、 $R$  と  $S$  を  $r$  と  $s$  で表す。

$$R = \frac{1}{r-s}, \quad S = -\frac{1}{r-s}$$

これで  $f(x)$  の閉じた式が作れる。 $r, s$  は後で求めることにして、と。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{(1-rx)(1-sx)} \\ &= \frac{R}{1-rx} + \frac{S}{1-sx} \\ &= \frac{1}{r-s} \left( \frac{1}{1-rx} - \frac{1}{1-sx} \right) \\ &= \frac{1}{r-s} \left( (1+rx+r^2x^2+r^3x^3+\dots) - (1+sx+s^2x^2+s^3x^3+\dots) \right) \\ &= \frac{1}{r-s} \left( (r-s)x + (r^2-s^2)x^2 + (r^3-s^3)x^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

まとめると、こうなる。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k - s^k}{r-s} x^k$$

これで  $r, s$  を使った一般項ができた。

$$a_k = \frac{r^k - s^k}{r-s}$$

あとは、 $r, s$  を求めるだけ。 $r$  と  $s$  の連立方程式はこう。

$$\begin{cases} r+s=1 \\ rs=-1 \end{cases}$$

普通に連立方程式として解いてもいいけれど、これは「二次方程式の解と係数の関係」でしょ。要するに、 $r, s$  は  $x^2 - (r + s)x + rs = 0$  の解よ。つまり、次の二次方程式を解けば、 $r, s$  が求まる、と。

$$x^2 - x - 1 = 0$$

二次方程式の解の公式より、

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

仮に  $r > s$  として、

$$\begin{cases} r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ s = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$r - s = \sqrt{5}$  だから、

$$\begin{aligned} \frac{r^k - s^k}{r - s} &= \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k \sqrt{5}} \end{aligned}$$

よって、フィボナッチ数列の一般項  $a_k$  は次の通り。

$$a_k = \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k \sqrt{5}}$$

はい、これで、ひと仕事おしまい。

僕はげんなり顔をする。この式、本当だろうか。だって、フィボナッチ数列は全部整数だよ。一般項に  $\sqrt{5}$  が出てくるとは思えないんだけど。

満足げな顔で、すっかり冷めたコーヒーを飲んでいるミルカさんは、僕の疑問に「試してみたら？」と言う。

じゃあ、たとえば、 $k = 0, 1, 2, 3, 4$  で検算してみよう。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(1 + \sqrt{5})^0 - (1 - \sqrt{5})^0}{2^0 \sqrt{5}} = 0 \\ a_1 &= \frac{(1 + \sqrt{5})^1 - (1 - \sqrt{5})^1}{2^1 \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 \\ a_2 &= \frac{(1 + \sqrt{5})^2 - (1 - \sqrt{5})^2}{2^2 \sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1 \\ a_3 &= \frac{(1 + \sqrt{5})^3 - (1 - \sqrt{5})^3}{2^3 \sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = 2 \\ a_4 &= \frac{(1 + \sqrt{5})^4 - (1 - \sqrt{5})^4}{2^4 \sqrt{5}} = \frac{48\sqrt{5}}{16\sqrt{5}} = 3 \end{aligned}$$

0, 1, 1, 2, 3 と、確かにフィボナッチ数列になっている。おお、そうか。具体的な  $k$  で計算すると、分子分母で  $\sqrt{5}$  がちゃんと消えるのか！

うーん、何ともすごいな。僕もコーヒーを飲みながら、今日やったことを振り返ってみた。

まず、フィボナッチ数列の一般項（つまり  $k$  についての閉じた式）を求めようと思い、フィボナッチ数列の  $a_k$  を係数に持つ関数  $f(x)$  を考えた。そして、関数  $f(x)$  の閉じた式（今度は  $x$  についての閉じた式だ）を求めた。そのときにフィボナッチ数列の漸化式を使った。最後に、関数  $f(x)$  の閉じた式を無限級数の形で明示的に表した。そのときの  $x^k$  の係数がフィボナッチ数列の一般項だ。

つまりは、数列を係数に持つ関数を使って、「数列を捕まえた」んだ。うーん、なるほど。

でも、先ほどの式展開では、あちこちで 0 割りの問題が発生しそうだな。

それに、無限級数の計算をするときに和の順序を変えるのはまずそうだ。問題ないだろうか。ミルカさん……。

「ちゃんと条件をつけないとまずいんだけど、今回はいいのよ。関数を使って見つけたことは内緒にしておいて、出てきた一般項を数学的帰納法で証明しちゃえばいいんだから」

ミルカさんは、すました顔で言った。

## 参考文献

- Graham, Knuth, Patashnik, 『コンピュータの数学』, ISBN 4-320-02668-3, 共立出版, 1993.

母関数全般、フィボナッチ数列の一般項の導出を参考にしました。

- 中村滋, 『フィボナッチ数の小宇宙』, ISBN 4-535-78281-4, 日本評論社, 2002.

第 16 章「生成関数」に書かれたフィボナッチ数列の一般項の導出を参考にしました。

## 読者のみなさんへ

この物語でミルカさんが使っている「無限数列に対応する関数」は、数学では母関数 (generating function) あるいは生成関数と呼ばれており、数列を研究する際にきわめて重要になる道具です。ミルカさんはすました顔ではしよりましたが、『コンピュータの数学』によれば、0 割りや和の順序を変えることについても厳密に定式化できるそうです。

『フィボナッチ数の小宇宙』によれば、ド・モアブルがフィボナッチ数列の一般項を求めるのに使ったのが、母関数の始まりとのこと。数列に対する母関数を考えると、関数の解析技法を数列の研究に応用できるのですね。

この文章の PDF ファイルは、以下の URL から入手できます。結城へのフィードバックも下記ページから送ることができますので、ぜひみなさんのご感想をお聞かせください。

ミルカさんとフィボナッチ数列

<http://www.hyuki.com/story/genfunc.html>

Copyright (C) 2005 Hiroshi Yuki (結城浩)

All rights reserved.

#### 更新履歴

- 2005 年 10 月 7 日、公開。
- 2005 年 10 月 8 日、数式および表現を微調整。