ミルカさんとコンボリューション*

結城浩†

2006 年 1 月

目次

* http://www.hyuki.com/girl/convolution.html

1　ミルカさん

「この問題読んだ？」

　放課後の図書室。お気に入りの席について、計算をはじめようとしていた僕の前に、ミルカさんが紙を一枚置く。彼女は立ったまま机に両手をついて、にこにこしている。

「問題？」

「村木先生の新作。クイズだって」

　紙にはこう書いてあった。

$$
\begin{aligned}
0+1 &= (0+1)\\
&\quad 1\text{ なら }1\text{ 通り。}\\[1em]
0+1+2 &= (0+(1+2))\\
&= ((0+1)+2)\\
&\quad 2\text{ なら }2\text{ 通り。}\\[1em]
0+1+2+3 &= (0+(1+(2+3)))\\
&= (0+((1+2)+3))\\
&= ((0+1)+(2+3))\\
&= ((0+(1+2))+3)\\
&= (((0+1)+2)+3)\\
&\quad 3\text{ なら }5\text{ 通り。}\\[1em]
0+1+2+3+\cdots+n &= \cdots\\
&\quad n\text{ なら何通り？}
\end{aligned}
$$

「これ何？」僕は紙から顔を上げて聞く。

「だから、新作のクイズ。ヒントは無し、だって」

「くどい問題」

「ふうん……。ストレートに書け。必要かつ十分な長さで書け。定式化して書け。用語を定義して書け。あいまいさを残さずに書け。威厳を持ち、香気を放ち、心打つほどの単純さを以(もっ)て書け。……と言うのね」

「その通り」

「まあ、よいとしようよ。漸化式(ぜんかしき)まではすぐにできたよ」

「ちょっと待った。これ、いつもらったの？」

「お昼休み。職員室に顔出したときにね。ちょっとフライングしたことになるか。確かに渡したよ。きみはここでゼロから考える。私はあちらで考える。それじゃ」

　ミルカさんはひらひらと手を振って、優雅に窓際の席へ移動する。僕の目はミルカさんをずっと追っていく。窓の向こうには、葉が落ちた木が見え、さらにその向こうには冬の青空が広がっている。晴れているけれど、ずいぶん寒そうだ。

僕は高校二年生。ミルカさんは同級生だ。僕たちは数学教師の村木先生から、ときどき問題を出してもらう。先生は変わり者だけど、僕たちのことを気に入っているらしい。

ミルカさんは数学が得意だ。僕も苦手じゃないけれど、彼女にはかなわない。僕が図書室で数式を展開して楽しんでいると、ミルカさんはちょっかいを掛けに来る。シャープペンを取り上げ、僕のノートに勝手に書き込みながら、講義をはじめる。まあ、そんな時間が楽しくないわけでもないけれど……。

ミルカさんが熱心に話すのを聞くのは好きだし、目をつむって考えている彼女を眺めるのも悪くない。メタルフレームの眼鏡がよく似合う、すっきりした頬のラインが……。

いや、そんなことより、問題に取り掛かろう。彼女は向こうで考えている。漸化式まではできたと言ってたっけ。彼女のことだから、すぐに解いてしまうかもしれないな。

とりあえず、解くべき問題を整理しよう。

$0+1,\quad 0+1+2,\quad 0+1+2+3,\quad \ldots$ という式があって、それに括弧(かっこ)が付いている。1 なら 1 通り、2 なら 2 通り、3 なら 5 通り、と書かれているから、どうも**括弧の付け方の場合の数**を求めることが問題のようだ。一般的に、$0+1+2+3+\cdots+n$ という式に括弧を付ける場合の数を求めることが目標だな。

n は何を表しているか。$0+1+2+3+\cdots+n$ という式は 0 から始まっているから、n は加える数の個数に 1 を加えたもの。プラスの個数だと考えても良い。

括弧の付け方のルールはどうか。プラスの左と右に式 —— 項(こう)と呼ぼうか —— が 1 個ずつある。つまり、$(0+1)$ や $(0+(1+2))$ は OK だけれど、$(0+1+2)$ のように 3 項の和にしては駄目ということだ。

まず具体例で考える。問題文では $n=1,2,3$ の場合の例が書かれているから、$n=4$ の場合を作ってみよう。ええと、……げっ、意外と多いな。

$$
\begin{aligned}
0+1+2+3+4 &= (0+(1+(2+(3+4)))) \\
&= (0+(1+((2+3)+4))) \\
&= (0+((1+2)+(3+4))) \\
&= (0+((1+(2+3))+4)) \\
&= (0+(((1+2)+3)+4)) \\
&= ((0+1)+(2+(3+4))) \\
&= ((0+1)+((2+3)+4)) \\
&= ((0+(1+2))+(3+4)) \\
&= (((0+1)+2)+(3+4)) \\
&= ((0+(1+(2+3)))+4) \\
&= ((0+((1+2)+3))+4) \\
&= (((0+1)+(2+3))+4) \\
&= (((0+(1+2))+3)+4) \\
&= ((((0+1)+2)+3)+4)
\end{aligned}
$$

14 通り。「4 なら 14 通り」ということか。

書いているうちに規則性が何となく見えてきたぞ。規則性が見えてきたということは、「括弧の付け方の場合の数」に関する漸化式に近づいたということだ。

具体例の次は一般化だ。プラスの個数を n 個としたときの、「括弧の付け方の場合の数」を a_n と呼ぶこと

にする。さっき数えたのはプラスの個数が 4 個の場合。すなわち、$a_4 = 14$ になる。これまでに分かったことは次の通り。

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 2 \\
a_3 &= 5 \\
a_4 &= 14
\end{aligned}
$$

あ、それからおそらく、

$$a_0 = 1$$

と見なしても良いだろう。

a_5 はずっと大きくなるだろうから、具体的に数える根気はちょっとないなあ。さて、次の一歩は「a_n に関する漸化式を作る」ことだ。ここが考えどころ。そして最終目標は「a_n を n について閉じた式で表すこと」だ。

では、漸化式を作ろう、と構えたところに、図書室の入り口から小柄な女の子が小走りにやってきた。

テトラちゃんだった。

2　テトラちゃん

「あ、あああっ。先輩」テトラちゃんは僕のすぐそばまでやってきて、あわてて話し始める。「もう勉強開始してしまいましたか。遅かったですかぁ」

テトラちゃんは高校一年生。僕の後輩だ。子リスか子犬か子猫のように僕になついている。ときどき数学の質問を持ってくる。単に分からない問題を聞きにくるだけじゃなく、なかなか本質的な疑問をぶつけてくることもある。いささかバタついているところが難点と言えなくもないが。

「ん、急ぎ？」

「いえ、いえいえいえ。いいです。お聞きしたいことがあっただけなのです」テトラちゃんは、手のひらを僕に向けて、左右に振りながら三歩後退。「お邪魔になるのはまずいので、またお帰りのときにでもお声掛けすることにいたします。今日も閉館の頃までいらっしゃいますよね？」

「そうだね。その頃まではずっと計算していると思う。一緒に帰る？」

僕はちらっと窓際に目を向ける。ミルカさんは机にきちんと座り、紙をじっと見ているようだ。向こうを向いていて、表情はよくわからない。身動きもしない。

「はいっ、ぜひぜひぜひ。ではっ」

テトラちゃんは踵（かかと）を合わせ、気をつけをし、大げさに敬礼して回れ右をする。そのまままっすぐ図書室から出て行った。出がけに一瞬だけミルカさんの方に目を走らせたけれど。

3　漸化式

さて、「括弧付けの場合の数」の漸化式に戻ろう。

0 から 4 までの 5 個の数があるとき、その間には 4 個のプラスがある。考えてみれば、いま求めたいのは括弧の付け方の場合の数なのだから、実際に加える数には意味がない。つまり、

$$((0+1)+(2+(3+4)))$$

という式を考える代わりに、

$$((A+A)+(A+(A+A)))$$

という式を考えてもよい。

漸化式を作るためには、括弧付けのルールを考える必要がある。この式はプラスが 4 個あるから、プラスが 3 個以下の場合に帰着させるんだろうな。つまり、

$$\underbrace{((A+A)+(A+(A+A)))}_{\text{プラスが 4 個}}$$

というパターンを、こんな風にとらえよう。

$$(\ \underbrace{(A+A)}_{\text{プラスが 1 個}}\ +\underbrace{(A+(A+A))}_{\text{プラスが 2 個}})$$

ふむ。ちょっと見えてきたぞ。最後のプラス——つまり、いちばん最後に加えるプラスがどこにあるかに着目しよう。上の式の場合には、左から 2 番目が最後のプラスだ。式は、最後のプラスによって、左と右の式に二分されている。プラスの位置を、左から順にずらしていけば、排他的で網羅的な分類、つまり類別ができる。プラスが 4 個の式は以下の 4 パターンに類別できるな。

$$\begin{gathered}((A)+(A+A+A+A))\\((A+A)+(A+A+A))\\((A+A+A)+(A+A))\\((A+A+A+A)+(A))\end{gathered}$$

この類別だと、$(A+A+A+A)$ のように括弧付けが済んでいない式を含んでいるけれど、これは、プラスの個数がさらに少ない場合に帰着できる。

うん、これで漸化式が作れそうだ。

$$(A+A+A+A+A\text{のパターン})$$

というのは、以下の 4 つのパターンに類別できる。

$$
\begin{aligned}
&(A \text{ のパターン}) \text{ のそれぞれに対して } (A+A+A+A \text{ のパターン})\\
&(A+A \text{ のパターン}) \text{ のそれぞれに対して } (A+A+A \text{ のパターン})\\
&(A+A+A \text{ のパターン}) \text{ のそれぞれに対して } (A+A \text{ のパターン})\\
&(A+A+A+A \text{ のパターン}) \text{ のそれぞれに対して } (A \text{ のパターン})
\end{aligned}
$$

ここで発想を「パターンの個数」に移す。「プラスが n 個ある式に括弧を付ける場合の数」を a_n で表すのだから、これで a_n に関する漸化式ができるはずだ。
「それぞれに対して」が場合の数の積になることに注意して、$n=4$ の場合、すなわち a_4 を考えてみよう。

$$a_4$$

というのは、次の 4 つの和になるわけだ。

$$
\begin{gathered}
a_0 \times a_3\\
a_1 \times a_2\\
a_2 \times a_1\\
a_3 \times a_0
\end{gathered}
$$

つまり、こうだ。

$$a_4 = a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0$$

よしよし。これで一般化ができる。

$$a_{n+1} = a_0a_{n-0} + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_{n-2}a_2 + a_{n-1}a_1 + a_{n-0}a_0 \qquad (n > 0)$$

美しい式が出てきたな。$\sum$ を使おう。

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1\\
a_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \quad (n \geq 0)
\end{aligned}
$$

よしっ。これで漸化式できあがり。
さっそく検算してみよう。

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= a_{0+1} = \sum_{k=0}^{0} a_k a_{0-k} = a_0 a_0 = 1 \\
a_2 &= a_{1+1} = \sum_{k=0}^{1} a_k a_{1-k} = a_0 a_1 + a_1 a_0 = 1 + 1 = 2 \\
a_3 &= a_{2+1} = \sum_{k=0}^{2} a_k a_{2-k} = a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0 = 2 + 1 + 2 = 5 \\
a_4 &= a_{3+1} = \sum_{k=0}^{3} a_k a_{3-k} = a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14
\end{aligned}
$$

合っているね。

これでやっと、ミルカさんがさっき言ってた「漸化式まではすぐにできる」という段階まで来たのかな。なかなか時間がかかったぞ。

「下校時間です」

司書の瑞谷(みずたに)先生がやってきて、よく通る声で宣言する。いつもタイトなスカートを穿(は)き、サングラスと見まごうほど色の濃い眼鏡を掛けている。ふだんは奥の司書室にいて、定時になると音もなく図書室の真ん中にやって来て、下校時間を宣言するのが常だ。時計のような瑞谷女史。

おっと。そういえばミルカさんはどうしているだろう。

見回したけれど、ミルカさんはどこにも居なかった。

4　一般化

「ねえ、先輩。先輩はよく《一般化》っておっしゃいますけれど、《一般化》というのは、どういうことなんですか」テトラちゃんは、大きな目をいつものように輝かせ、明るい声で僕に問いかける。

僕とテトラちゃんは、並んで歩きながら、駅に向かっていた。あれからミルカさんを探したんだけれど、どこにも居なかった。教室にも居なかったし、カバンもなかったから、どうも先に帰ってしまったようだった。何だか変な気分。村木先生の問題をもう解いたということなんだろうか。それにしても、帰るなら一声かけてくれればいいのに。

だいぶ薄暗くなってきたけれど、街路灯はまだ点いていない。僕たちは、住宅地を抜けていく複雑な道を通る。これが学校から駅までの最短経路なのだ。普段のテトラちゃんはバタバタしているのに、帰りの道のときだけは不思議に歩き方が遅い。彼女のペースに合わせて歩く。

「一般化の話を、一般的にするのは難しいね。たとえば、数学の公式を考えよう。2 や 3 のような具体的な数が公式の中に含まれていたとする。その公式から、すべての整数 n について成り立つ公式を考えるというのは代表的な《一般化》だと思うよ」

「すべての整数 n について成り立つ公式……ですか？」

「そう。2 や 3 という具体的な数についての公式じゃない。整数は無数にあるから、$2, 3, 4, \ldots$ についての公式をひとつひとつ具体的に列挙することはできない。いや、列挙することはできるけれど、すべてを列挙し尽

くすことはできない。その代わりに、変数 n を含んだ式を作る。そして、その変数 n に、どんな整数を当てはめても成り立つようにする。それが《どんな整数についても成り立つ公式》だよ。《すべての整数について成り立つ公式》と表現してもいい。同じことだ」

そこでテトラちゃんは大きなくしゃみをした。

「寒いの？　……そういえば、マフラーしてないね」

「はい。今朝、あわてて家を出たもので……」ぐしゅん、と鼻を鳴らす。

「じゃ、これ貸すよ。よければ、どうぞ」僕は自分のマフラーを彼女に渡す。

「あ、ありがとうございます。—— うわ、あったかい……。でも、今度は先輩が寒いですよね」

「大丈夫、大丈夫」

「すみません。マフラーを《分けっこ》できたらいいんですけれど」

「—— それは大胆な」

「え？　……あちゃちゃ。ちがいます、ちがいます。そういう意味じゃなくて……」彼女はあせって手をばたばた上下させる。僕はくすくす笑う。

「と、ところでですね。さっきの《すべての整数について成り立つ公式》の話ですけど、もうちょっと詳しく……」テトラちゃんは話題を戻した。手の上下運動を繰り返して体勢を立て直したらしい。

「はいはい。でも実際のところ、歩きながらだと数式が書けないから、説明しにくいんだよね。駅前の《ビーンズ》で説明しようか。もし時間があれば」

「あります、ありますっ」テトラちゃんは急に早足になり、僕を追い越していく。

「せんぱーい。はやくう」振り向いて僕を呼ぶテトラちゃんの吐く息が白い。

5　展開

駅前の《ビーンズ》で、ホットコーヒーを飲みながら、僕たちは数式を展開する。

たとえば、こんな公式があるよね。

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

ここでは $x+y$ という式を 2 乗したとき、展開したらどうなるかが示されている。次の式は 3 乗だ。

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

これはこれでいいんだけれど、この式を指数に関して《一般化》してみよう。つまり、2 乗や 3 乗の公式ではなく、「n 乗の公式」にするんだね。$(x+y)^n$ の展開式を求めようというわけだ。仮に n は 1 以上の整数とする。

まず、一般化する前に、自分が知っている具体的な知識を整理しよう。$(x+y)^n$ で、n が $1, 2, 3, 4$ の場合を書くと、次のようになる。

$$\begin{aligned}(x+y)^1 &= x+y\\(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\end{aligned}$$

そして、いまから求めたいのは、

$$(x+y)^n = x^n + \cdots + y^n$$

だ。x^n の項と y^n の項が出てくるのはわかる。あとは、$x^n + \cdots + y^n$ の $\cdots$ のところを埋めればよい。

「……覚えていません。すみません」とテトラちゃんが言う。

え、違うよ違うよ。思い出すんじゃなく、考えるんだよ。考える。

次のように考えてみよう。

$$\begin{aligned}(x+y)^1 &= (x+y)\\(x+y)^2 &= (x+y)(x+y)\\(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y)\\(x+y)^4 &= (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)\\&\vdots\\(x+y)^n &= \underbrace{(x+y)(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n\text{ 個}}\end{aligned}$$

「これは納得です。$(x+y)^n$ は $(x+y)$ を n 回掛けたものですからね」

そう。ところで、n 個の $(x+y)$ を乗じるとき、ひとつひとつの $(x+y)$ から、x か y のどちらかを選んで掛け算をすることになる。たとえば 3 乗の場合には、3 個並んでいる $(x+y)$ のそれぞれから、x と y のいずれかを一個ずつ選んで掛ける。すべての選び方を考え、x と y のうちで選んだ方に $\dot{}$ で印をつけてみよう。

$$\begin{aligned}(\dot{x}+y)(\dot{x}+y)(\dot{x}+y) &\to xxx = x^3\\(\dot{x}+y)(\dot{x}+y)(x+\dot{y}) &\to xxy = x^2y\\(\dot{x}+y)(x+\dot{y})(\dot{x}+y) &\to xyx = x^2y\\(\dot{x}+y)(x+\dot{y})(x+\dot{y}) &\to xyy = xy^2\\(x+\dot{y})(\dot{x}+y)(\dot{x}+y) &\to yxx = x^2y\\(x+\dot{y})(\dot{x}+y)(x+\dot{y}) &\to yxy = xy^2\\(x+\dot{y})(x+\dot{y})(\dot{x}+y) &\to yyx = xy^2\\(x+\dot{y})(x+\dot{y})(x+\dot{y}) &\to yyy = y^3\end{aligned}$$

これですべてを尽くしている。これを全部足し合わせると、

$$xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

になる。これが求める式だ。$(x+y)(x+y)(x+y)$ という「和の積」が、$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ という「積の和」になった。これが展開だね。逆に「積の和」を「和の積」にするのが因数分解。

「はい、よくわかります。……何だか、$xxx, xxy, xyx, \ldots, yyy$ という並びには規則性がありそうですね」

うん。なかなか鋭いね、テトラちゃん。

「へっへー」照れながら、ちらっと舌を出す。

じゃ、もう少し先に進もう。n 個の $(x+y)$ から、x または y の片方を選び出すんだ。全部が x になる選び方は何通りあるかな。

「ええと。必ず x を選ぶんだから……ひと通りですね」

その通り。では、x を $n-1$ 個、y を 1 個選ぶ選び方はどうかな。

「ええと、一番右の y を選んで残りは x を選ぶ場合、右から二番目の y だけを選ぶ場合、……ってやればいいので、n 通りですね！」

はい正解。では、またまた《一般化》だよ。x を $n-k$ 個、y を k 個選ぶ選び方は何通りだろう。

「えとえと、うーんと、n は $(x+y)$ の個数ですよね。k って何ですか」

それはいい質問。k は、選んだ y の個数。もしくは y を選んだ $(x+y)$ の個数。$0 \leq k \leq n$ という条件を満たす整数だ。さっき、僕は $k=0$ と $k=1$ の場合を聞いたよね。

「ははあ。それでは、n 個のものから k 個選ぶ場合の数ってことですね。選ぶ順番はもう決まっているから、組み合わせ……でしたっけ」

そう。組み合わせだね。y を k 個選び、x を $n-k$ 個選ぶ場合の数は、

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-0)(n-1)\cdots(n-(k-1))}{(k-0)(k-1)\cdots(k-(k-1))}$$

で表せる。これが $x^{n-k}y^k$ の係数だ。

「先輩、質問です」テトラちゃんはまっすぐ右手を上げる。「$\binom{n}{k}$ って何ですか。組み合わせって ${}_n\mathrm{C}_k$ ですよね。それなら分かるんですけれど……」

ああ、同じだよ。書き方の違いだけ。

「もう 1 つ質問です。組み合わせって ${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ だと覚えていたんですけれど、先輩の式は違いますよね」

いや。$(n-k)!$ の部分を約分してみればわかるけれど、同じだよ。**下方階乗冪**（かほうかいじょうべき）を使うと、もっとシンプルに書けるんだけれどね。下方階乗冪っていうのは、$x^{\underline{n}}$ と書いて、n 段の階段を下降していくような積だよ。つまり、こういうこと。

$$x^{\underline{n}} = (x-0)(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))$$

普通の階乗 $n!$ は下方階乗冪でこう書ける。

$$n! = n^{\underline{n}}$$

下方階乗冪を使えば、$\binom{n}{k}$ はこんなに美しく書ける。

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k^{\underline{k}}}$$

「え、ええと……」

ごめん、ちょっと横道にそれちゃった。話を戻そう。$(x+y)^n$ を展開した式を得ることができたところだね。規則性が分かりやすいように冗長（じょうちょう）な書き方をしよう。

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= (y\text{ を }0\text{ 個選ぶ}) + (y\text{ を }1\text{ 個選ぶ}) + \cdots + (y\text{ を }k\text{ 個選ぶ}) + \cdots + (y\text{ を }n\text{ 個選ぶ}) \\ &= \binom{n}{0}x^{n-0}y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + \binom{n}{n}x^{n-n}y^n\end{aligned}$$

各項で変化している部分に注目して、$\sum$ を使って表せば、こうなる。これが求める式だ。

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

最初からこの式だけを提示してもなかなか覚えられない。でも、自分の手を動かして今の導出をやってみると、覚えることはそれほど難しくない。いざとなったら自分で導き出せるようになるまで練習すると、いつのまにか覚えている、というのは逆説的だけれど面白い話だと思うね。

「へえ ……。組み合わせの公式がこんなところに出てくるのですね。確率を勉強したときに、白い玉と赤い玉を選ぶ組み合わせ、とかいうのをやって、掛け算をたくさんした記憶があります。約分の練習みたいでした。でも、こんな風に式の展開に組み合わせの数が出てくるのは知りませんでした」

さて、今度は検算だ。具体例を考えて、一般化した。それが済んだら必ず検算をする。$n = 1, 2, 3, 4$ で確かめてみよう。ここでさぼっちゃだめだよ。

$$
\begin{aligned}
(x+y)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k \\
&= \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 \\
&= x + y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^{2-k} y^k \\
&= \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^{3-k} y^k \\
&= \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^{4-k} y^k \\
&= \binom{4}{0} x^4 y^0 + \binom{4}{1} x^3 y^1 + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x^1 y^3 + \binom{4}{4} x^0 y^4 \\
&= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4
\end{aligned}
$$

テトラちゃんは式を一つ一つ確かめてから頷く。「公式の中に文字がたくさん出てくると『うわあっ、ややこしそう』って感じてたんですけど、一般化した結果だと思うと何だか納得です。文字が増えるのはしょうがないのですね」

うん。具体的な公式を無限個用意する代わりに、n という変数を 1 個入れた公式をひとつだけ用意したんだね。《一般化》した公式だ。各項の部分も k という変数を使って一般化してあるね。

「はい、でも……$n-k$ や k がごちゃごちゃして、覚えるのはたいへんそうです」

$n-k$ と k とを別々に考えるんではなく、和が n だと覚えるんだ。そして、その和のバランスを 0 から n まで変えていく。はじめは x の指数が n で最大。そのとき y の指数は 0 で最小。そして x の指数を 1 減らすごとに、y の指数を 1 増やす。最後になると x の指数は最小 0 になり、y の指数が最大 n になっている。そんな風に考えるんだ。k は現在のバランス位置なんだね。

「ははあ……。x から y へ、少しずつ移っていくんですね」

その通り。全部で n 乗するのを、x と y で分けたんだ。マフラーを《分けっこ》するようにね。

「せ、先輩っ！　そこに話題を戻しますか……」

6　母関数の積

夜中。家族は寝静まっている。僕は自室でひとり、心おきなく考えにふける。

場合の数を求める問題の漸化式はすでに手に入った。

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \quad (n \geq 0)
\end{aligned}
$$

僕はこれから、あることを試そうと思っている。それは、**母関数**(ぼかんすう)による解法だ。

ミルカさんと僕は、フィボナッチ数列の一般項を求めたことがあった。あのとき彼女は、母関数という形式的な冪級数(べききゅうすう)と数列とを対応付けていた。

僕はノートを広げ、記憶をたどりながら書き始める。

数列 $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ が与えられたとき、数列の各項を係数に持つ、$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ という形式的冪級数を考える。これが母関数だ。そして、以下のような対応関係を考え、数列と母関数とを同一視する。

$$
\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \rangle \qquad \longleftrightarrow \qquad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots
$$

このような対応関係を考えるメリットは、無限に続く数列を、たった一つの母関数で表現できる点にある。そしてさらに、その母関数を閉じた式で表せたら、素晴らしいことが起こるのだ。

ミルカさんと僕とは、母関数を使ってフィボナッチ数列の一般項を求めた。手からぼろぼろとこぼれていく数列を、母関数という一本の糸でつなぎとめる。あれはどきどきする経験だった。

僕は、あのときの解き方を、今回の問題でも試してみようと思う。

n 個のプラスからなる式に括弧を付ける場合の数を a_n とし、数列 $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ を考える。

次に、この数列の母関数を $a(x)$ とする。x は数列を混濁させないための形式的な変数だ。x^n の指数 n が、a_n の添字 n に対応する。$a(x)$ は次のような姿になる。

$$
a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots
$$

以上は単なる約束事。ここまでは、ぜんぜん頭は使っていない。

頭を使うのはここからだ。

いま僕が手にしている武器は a_n の漸化式だけだ。この漸化式を使って $a(x)$ **の閉じた式を求める**のが次の一歩だ。$a(x)$ の閉じた式……x について閉じた式を求めよう。その式には n は出てこないはず。

しかし……だ。今回の漸化式はフィボナッチ数列のときのように単純じゃない。あのときは確か、母関数に x を乗じて、数列を「シフトする」という操作を行い、それから足したり引いたりするだけで、n が消えてくれた。

でも、今回の漸化式の $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ は手ごわそうだ。ややこしい「積の和」の形だ。
ん？
「積の和」……だって？
しかも、a_k と a_{n-k} は、「添字の和が n」……か。
ほう。
僕は、テトラちゃんに言った自分のセリフを思い出した。

> ……$n-k$ と k とを別々に考えるんではなく、和が n だと覚えるんだ。そして、その和のバランスを 0 から n まで変えていく……

今回の漸化式に出てくる $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ も似ている。a_k と a_{n-k} で、添字の和が n になる。そして、その和のバランスを変えるように、k を 0 から n まで動かしている。
いま手にしている漸化式の主張はこうだ。 $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ という、うまい形の「積の和」を作ることができたら、それは a_{n+1} というシンプルな項に置き換えられる、と。
思い出そう。どういう場面で「積の和」が出てきたのかを。

> ……$(x+y)(x+y)(x+y)$ という「和の積」が、$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ という「積の和」になった。これが展開だね……

「和の積」を展開したら「積の和」になった、という話か。
よしっ。
ポイントは積にありそうだ。**母関数の積**を作ってみよう。手を動かして計算すれば、きっと何かがわかる。
いまは母関数は $a(x)$ しかないから、これを 2 乗する。何が出てくるか……。母関数はこうだ。

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

だから、2 乗は……こうなる。

$$a(x)^2 = (a_0a_0) + (a_0a_1 + a_1a_0)x + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0)x^2 + \cdots$$

定数項は a_0a_0 で、x の係数は $a_0a_1 + a_1a_0$ で、x^2 の係数は $a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0$ か。
では、《一般化》して——テトラちゃんの大きな目を思い出しながら——式 $a(x)^2$ の x^n の係数を書き表してみよう。
書く、書く、書く。シャープペンが走る音。
……できた。

$$a_0a_n + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_ka_{n-k} + \cdots + a_{n-2}a_2 + a_{n-1}a_1 + a_na_0$$

添字に注目する。a_ka_{n-k} で、左の添字はだんだん大きくなり、右の添字は小さくなる。k は 0 から n までの範囲を動く。

ここまで冗長に書くとかえって分かりにくいな。$\sum$ を使おう。一般的に書けば、x^n の係数は、

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

になる。これは $a(x)^2$ という式の「x^n の係数」なんだから、式 $a(x)^2$ そのものは二重和の形になって……こう書ける。

$$a(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} x^n$$

出てきた。

出てきたぞ。

うまい形の「積の和」$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ が出てきた。うまい形の「積の和」ができたから、その部分は漸化式を使って簡略化できるはず。漸化式によれば、

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

を、

$$a_{n+1}$$

という単純な項に置き換えられる。

つまり……

母関数 $a(x)$ の 2 乗はかなり簡略化できるぞ。$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ を a_{n+1} で置き換えよう。

$$\begin{aligned} a(x)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

おお、二重和が消えた！

ちょっと待て。a_{n+1} の添字と x^n の指数が 1 個ずれている。これは、$a(x)$ を一個分シフトしたもの……だな。ずれの解消はフィボナッチ数列のときに経験ずみだ。ずれている分だけ x を掛ければよい。

$$x \cdot a(x)^2 = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$$

右辺の x を $\sum$ の中に入れてやろう。

$$x \cdot a(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1}$$

$n = 0$ の部分を、$n + 1 = 1$ と読みかえる。添字と指数に合わせるためだ。

$$x \cdot a(x)^2 = \sum_{n+1=1}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1}$$

そして $n + 1$ をすべて機械的に n で置き換える。

$$x \cdot a(x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

よしっ。右辺の $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ は、ほとんど母関数 $a(x)$ に等しい——初項 a_0 が欠けているだけだ。

$$x \cdot a(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0$$

これで、n が消えるぞ！

$$x \cdot a(x)^2 = a(x) - a_0$$

$a_0 = 1$ を使い、式を整理すると、

$$x \cdot a(x)^2 - a(x) + 1 = 0$$

$a(x)$ についての**二次方程式**が出てきた。仮に $x \neq 0$ として解くと……

$$a(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

になる。

ふう。

うまくいった。

母関数の積によって、うまい形の「積の和」ができて、ちょうどよく閉じた式が導けた。母関数の積がこれほど強力だとは。

母関数 $a(x)$ がどうして $\pm$ の二つになるのか分からないし、そもそも $\sqrt{1 - 4x}$ の部分をどうするか、謎が深まった気もするけれど。

とにもかくにも。

なにはともあれ。

僕は、母関数 $a(x)$ の閉じた式を手に入れた。

7 ミルカさんの解

「はじめは漸化式を立てたけれど——」とミルカさんは早口で話し始めた。「——途中で方針変更したよ」

次の日。放課後の図書室。僕の隣にはミルカさん。

「え、漸化式を解いたんじゃないってこと？」

「まあね。うまい対応がみつかったのよ」

（うまい対応？）

僕がノートを広げると、ミルカさんはさっそく書き始める。

「たとえば、$n = 4$ のときのこういう式を例にして考えよう。

```
( ( 0 + 1 ) + ( 2 + ( 3 + 4 ) ) )
```

これをよく見ると、こんなふうに『閉じ括弧』を消してしまっても、復元できる。

```
( ( 0 + 1 + ( 2 + ( 3 + 4
```

閉じ括弧を復元できるのは『プラスがつなぐのは 2 項』という制約のおかげだよ」

「なるほど。2 つ目の項が出揃ったところに閉じ括弧を挿入すればよいのか」僕は少し考えてから答える。僕は $((A + A) + (A + (A + A)))$ でやめてしまったけれど、もっと簡単にできたんだ。

ミルカさんは唇の端をちょっとあげて微笑む。

「もっと言えば、数字すら書く必要はないんだよ。これでいい。

```
( ( + + ( + ( +
```

これでも復元できる。プラスの左側に数を書けばよい」

「それと、最後にね。最後の 4 だけはプラスの左側じゃない」と僕は補足する。

「まあね。要するに括弧の付け方の場合の数というのは、『開き括弧』と『プラス』を並べる場合の数で考えられる。$n = 4$ のときを考えると、開き括弧 4 個とプラス 4 個とを並べる場合の数を考えることになる。8 個の文字（たとえば$*$）のうち……

```
* * * * * * * *
```

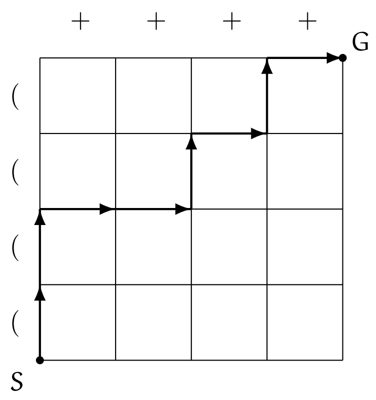
どの 4 個を開き括弧に変身させるかを考えるのよ。

```
( ( * * ( * ( *
```

開き括弧にならなかった残りの文字は自動的にプラスに変身する。

```
( ( + + ( + ( +
```

括弧とプラスを 4 個ずつ、合計 8 個から、開き括弧にする 4 個を選ぶ組み合わせ $\binom{8}{4}$ を考えた。これは $n = 4$ のときの話。一般には、括弧とプラスを n 個ずつ、合計 $2n$ 個から、開き括弧にする n 個を選ぶ組み合わせ $\binom{2n}{n}$ を考える。こういう道の最短経路の数と等価だよ。左下の S はスタート、右上の G はゴール。矢印で示した道順は `( ( + + ( + ( +` という文字列に対応する」



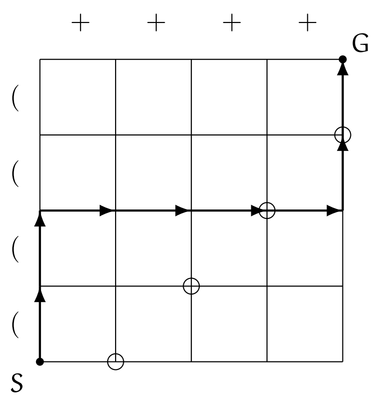
「それで、次に……」

「ちょっと待って——」僕は、どんどん話を進めようとするミルカさんを制する。

「——ミルカさん、それはぜんぜんおかしい。だって、8 個の中から任意の 4 個を選べるわけじゃない。たとえば、いくら括弧とプラスの個数が 4 個ずつになっていてもこんな並べ方はできないじゃないか。

((+ + + + ((

ミルカさんの図に、((+ + + + ((に対応する経路を描いてみればよくわかる。この図で、○を付けた交差点を通るたどり方をカウントしちゃいけないんだ」



ミルカさんは手をひらひらさせて、眉根を寄せる。

「まあ、待ってよ。話はまだ先がある。括弧とプラスを並べる途中、括弧の数をプラスの数が越えてはいけないって制約がある。

括弧の数をプラスの数が越えるのはどういうときかというと、きみのいう通り、上の図で○を通るときだ。

〇を通らずに S から G までいく場合の数が、a_n に等しい。

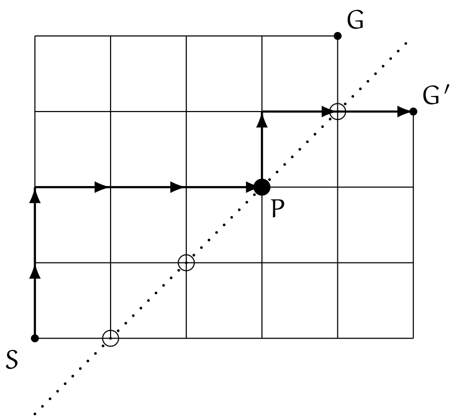
制約を考えず、S から G までいく場合の数は、$\binom{2n}{n}$ だ。

では、S から G までいく途中に〇を一度でも踏んでいく場合の数はどうか。

はじめて踏んだ〇の場所を P とする。そのとき、P よりあと、進む向きをすべて入れ替えることにするよ。斜めの点線を鏡だと思い、P → G の途中で右に行くなら上に、上に行くなら右に進むんだ。すると、G ではなく G′ にたどり着く。

G′ は G を鏡にうつした地点だよ。要するに、((+ + + + ((を ((+ + + (+ + に変換したことになるね。

そう考えると、〇を踏むすべての場合の数は、S から G′ にいく場合の数に一対一に対応するよ。つまり、$\binom{2n}{n+1}$ になる。$\binom{2n}{n-1}$ でも同じだけれど。



すると、結局、

$$
\begin{aligned}
a_n &= (\text{S から G までの経路数}) - (\text{S から G}' \text{ までの経路数}) \\
&= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \\
&= \frac{(2n)^{\underline{n}}}{(n)^{\underline{n}}} - \frac{(2n)^{\underline{n+1}}}{(n+1)^{\underline{n+1}}} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(2n)^{\underline{n}}}{(n+1)\cdot(n)^{\underline{n}}} - \frac{(2n)^{\underline{n}}\cdot(n)}{(n+1)\cdot(n)^{\underline{n}}} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(2n)^{\underline{n}} - (2n)^{\underline{n}}\cdot(n)}{(n+1)\cdot(n)^{\underline{n}}} \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)^{\underline{n}}}{(n)^{\underline{n}}} \\
&= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}
\end{aligned}
$$

になることがわかる。下方階乗冪をフル回転させたけれど、いいよね。

よって、プラスが n 個の式に括弧を付ける場合の数はこうなる。

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

はい、これで、ひと仕事おしまい。さあ、検算してごらん」

僕は、ミルカさんの解にショックを受けながらも、計算してみる。

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{1+1}\binom{2}{1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1} = 1 \\
a_2 &= \frac{1}{2+1}\binom{4}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 2 \\
a_3 &= \frac{1}{3+1}\binom{6}{3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 5 \\
a_4 &= \frac{1}{4+1}\binom{8}{4} = \frac{1}{5}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 14
\end{aligned}$$

「すごい……」

ミルカさんは、僕の言葉に満面の笑みを見せた。

「じゃ、今度はきみの話を聞くよ」

8　立ち直り

ミルカさんに水を向けられたけれど、彼女のエレガントな解は、かなりのショックだった。母関数で考えようとしたのはいいけれど、ややこしい閉じた式ができただけで、進展は見込めそうにない。僕は分不相応なものに挑戦してしまったのか。母関数の積を作ったときの感動も忘れ、僕はがっかりしてしまった。

僕の顔色を見てミルカさんは、「まあ、いいから、話してみてよ。漸化式を作って、それからどうしたの」とうながす。

僕は、母関数の解法を試そうと思ったこと、母関数の積を作って「うまい形の積の和」を作り出し、二次方程式にこぎつけ、母関数の閉じた式を手に入れたことまでを話した。それにしても悔しい。

「どんな式かな」と彼女は言う。

僕はしかたなく、黙ってノートに書く。

$$a(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

「ふうん。難点は二つありそうね。$\pm$ の部分と、それから、$\sqrt{1-4x}$ の部分」

「そんなことはわかっているよ。そこで詰まっているんだ」

珍しくいらだった僕の声には反応せず、ミルカさんは淡々と続けた。

「まず、$\pm$ から考えてみるとしようよ」

ミルカさんは、数式をしばらく見てから目を閉じ、心持ち上に顔を向ける。そして、右手の人差し指をまっすぐ上に向けてくるくる、と回す。ゼロを描いて、ゼロを描いて、無限大を描き、目を開ける。
「定義に戻ってみよう。母関数 $a(x)$ はこうなっているね」

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

「ということは、$x = 0$ とすると、x を含む項はすべて消えて $a(0) = a_0$ になる。そこできみの見つけた閉じた式に戻るよ」

$$a(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

「これで $a(0)$ はどうなるだろう」
「だめだよ。ゼロ割りになるから、$a(0)$ は無限大になってしまう」僕は答える。だいぶ落ち着いてきた。ミルカさんにいらついてどうする。甘えてどうする。
「いや、ちがうよ」とミルカさんは首をゆっくり振る。「片方は無限大だけど、片方は不定だよ。$a(x)$ の $\pm$ のうち、プラスを使ったほうを $a_+(x)$ と呼び、マイナスを使ったほうを $a_-(x)$ と呼ぶことにすると——

$$\begin{aligned} a_+(x) &= \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} \\ a_-(x) &= \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \end{aligned}$$

——になる。ゼロ割にならないように、分母を払って考えてみよう」

$$\begin{aligned} 2x \cdot a_+(x) &= 1 + \sqrt{1-4x} \\ 2x \cdot a_-(x) &= 1 - \sqrt{1-4x} \end{aligned}$$

「$x = 0$ のとき左辺はどちらも 0 だね。式 $1 + \sqrt{1-4x}$ は 2 になってしまい、式 $1 - \sqrt{1-4x}$ のほうは 0 だ。ということは、どういうことかな」
「少なくとも $a_+(x)$ は不適切だということか……」
「おそらくは。母関数についてもっと深く学ばないときちんとは言えないけれど、少なくとも $a_+(x)$ を追うのは不毛。追うべき母関数は $a_-(x)$ に絞れたことになる。次の目標は……何かしら？」
「$\sqrt{1-4x}$ をどうするか、だね」
気持ちをだいぶ立て直した僕に、ミルカさんはにっこりする。

9 マフラー

そのとき僕は、図書室の入り口にテトラちゃんが立っているのに気が付いた。彼女は、並んで座っている僕とミルカさんを見ている。体の前に、小さな紙のバッグを両手で下げて、じっと立っている。いつから居たん

だろう。
僕はテトラちゃんに軽く手を上げる。彼女はいつもと違う。こちらにゆっくり歩いてくる。少しもバタバタしていない。まじめな顔だ。
「……先輩。昨日はありがとうございました」
テトラちゃんは、静かな声でそういって頭を下げ、紙バッグを差し出す。きちんとたたんだマフラーが入っている。
「ああ、うん。どういたしまして。風邪ひかなかった？」
「ええ、大丈夫です。マフラーを貸していただきましたし、温かい飲み物もご一緒できましたし」
テトラちゃんは、そう言ってミルカさんのほうへ視線を移す。僕もつられたようにミルカさんを見る。ミルカさんはシャープペンを持った手を止め、ゆっくり顔を上げる。バッグを一瞥（いちべつ）してから、テトラちゃんを見る。二人の女の子は、無言のまま、まっすぐに互いの目を見る。
誰も、何も言わない。

約 4 秒が経過する。

テトラちゃんは、ふう、と息をはいてから僕のほうへ向き直る。
「今日は失礼いたします。数学、また教えてくださいね」テトラちゃんはそっと頭を下げ、図書室から出て行く。入り口で振り向いて、もう一度軽く礼をした。
ミルカさんはもう紙に向かい、数式を書き始めている。
「何か思いついた？」と僕が聞く。もちろん、$\sqrt{1-4x}$ のことだ。
ミルカさんは顔を上げず、式を書きながらひとこと言った。

「手紙」

「えっ？」
ミルカさんは顔を伏せたまま計算を止めずに、また一言。

「……手紙が入っている」

僕はバッグを見る。手を入れて探る。マフラーの下に何かある。取り出すと、上品なオフホワイトのメッセージカード。なぜミルカさんはカードに気づいたんだろう。テトラちゃんの字で短いメッセージ。

あたたかいマフラーをありがとうございました。　テトラ

P.S. また《ビーンズ》に誘ってくださいねっ！

10　最後の砦

僕たちは、問題に戻った。
母関数 $a(x)$ の閉じた式は次のように求められた。

$$a(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

次の問題は、$\sqrt{1-4x}$ をどうするか、だ。

「流れが追えなくなってきたよ、ミルカさん。$a(x)$ の閉じた式を得て、それから……。フィボナッチ数列の一般項のとき、どうしてた？」

「$a(x)$ の閉じた式を使ってやるのは、x^n の係数を見つけること。$a(x)$ の閉じた式を求めるとき n を消したでしょう。今度は逆。ただし、それは漸化式由来で出すのではなく、$a(x)$ 由来の無限級数として出す」ミルカさんは静かに話す。

「$\sqrt{1-4x}$ が邪魔だなあ。そもそも、$\sqrt{1-4x}$ がどうなればよいんだろう」と僕はつぶやく。

「それは、やっぱり、展開するしかないよね。たとえば、こんなふうに展開できたとしよう」と言いながら、ミルカさんは式を示す。

$$\begin{aligned}\sqrt{1-4x} &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\end{aligned}$$

「ところで、求めたい母関数 $a(x)$ は、こうだった。

$$a(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

だから、分母を払って、

$$2x \cdot a(x) = 1 - \sqrt{1-4x}$$

になる。ここに、$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ および $\sqrt{1-4x} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ をあてはめると、こう書ける。

$$2x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

左辺は $2x$ を中に入れ、右辺は $k=0$ の項を外に出す。

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^{k+1} = 1 - b_0 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$$

左辺を $k=1$ からスタートするように調整。

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2a_{k-1} x^k = 1 - b_0 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$$

$\sum$ を左辺に集める。

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2a_{k-1}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k = 1 - b_0$$

$\sum$ をまとめる。このあたりは、もっときちんとしなくちゃまずいんだけれどね。

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2a_{k-1} + b_k)x^k = 1 - b_0$$

両辺の係数を比較して、以下の式が成り立つことが言える。

$$\begin{aligned} 1 - b_0 &= 0 \\ 2a_{k-1} + b_k &= 0 \qquad (k \geq 1) \end{aligned}$$

整理すると、

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ a_n &= -\frac{b_{n+1}}{2} \qquad (n \geq 0) \end{aligned}$$

つまりね、b_n を求めれば、a_n も自動的に求められることがわかる。$\sqrt{1-4x}$ が展開できれば、最後の砦が破れる」

11 陥落

「では、最後の砦を陥落しに行こう」ミルカさんは待ちきれないように言う。

「いま、$b(x) = \sqrt{1-4x}$ とする。そして、

$$b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

としたときの $\langle b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots \rangle$ を求めることが目標だよ。どこから攻めこむのが良い？」

「すぐに分かるところからいこう」

「ふうん。じゃ、b_0 はどうすれば分かる？」

「$x = 0$ を試そう」と僕は即答する。「そうすれば、$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ のうち、定数項以外はすべて消える。つまり、

$$b(x) = b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

だから、

$$b(0) = b_0$$

ということだ」

「そうね。次はどうする？」とミルカさんが聞く。

「x を何にしたらいいかということ？」僕は聞き返す。

「違う。関数を解析する基本技術を使おうよ」ミルカさんはいたずらっぽく言う。

「何？」

「微分よ。$b(x)$ を x で微分すると、数列がシフトして、定数項に b_1 が来る。

$$\begin{aligned} b(x) &= b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n + \cdots \\ b'(x) &= 1b_1 + 2b_2 x^1 + 3b_3 x^2 \cdots + nb_n x^{n-1} + \cdots \end{aligned}$$

だから、

$$b'(0) = 1b_1$$

になる。なぜ 1 を明示的に書いているかはわかるよね。微分では指数が降りてくるから、そのパターンをつかむためだよ。ここまでくれば、楽だよ。$b'(x)$ をさらに微分すると、

$$b''(x) = 2 \cdot 1b_2 + 3 \cdot 2b_3 x^1 \cdots + n \cdot (n-1) b_n x^{n-2} + \cdots$$

だから、こうなる。

$$b''(0) = 2 \cdot 1b_2$$

あとは、これの繰り返し。$b(x)$ を n 回微分したものを $b^{(n)}(x)$ と表すことにすると、

$b^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1b_n + (n+1)n(n-1)(n-2) \cdots$ ってもう、面倒だなあ……

長たらしくなるから、下方階乗冪を使って書くよ。

$$b^{(n)}(x) = n^{\underline{n}} b_n + (n+1)^{\underline{n}} b_{n+1} x^1 + \cdots + (n+k)^{\underline{n}} b_{n+k} x^k + \cdots$$

だから、$x = 0$ で、こうなる。

$$b^{(n)}(0) = n^{\underline{n}} b_n$$

つまり、b_n は $x = 0$ における微分係数で表せる。

$$b_n = \frac{b^{(n)}(0)}{n^{\underline{n}}}$$

これで一段落」
ミルカさんは一息入れる。
「うーん。でも、ここからはどこにも行けないよ。行き止まりだ」と僕は言う。
「どうしてそんなことを言うのかな。いまは冪級数の形で $b(x)$ をとらえた。今度は普通の関数の形でとらえてみようよ」
「とらえる？」
「関数を解析する基本技術を使いましょう——また微分よ」
そういって、ミルカさんはウインクした。こんなお茶目な彼女は初めてかもしれない。
「$b(x)$ の定義を思い出して……

$$b(x) = \sqrt{1-4x}$$

……ということは、こうよ。

$$b(x) = (1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

出てくるパターンに注意しながら、繰り返し微分しよう。

$$
\begin{aligned}
b(x) &= (1-4x)^{\frac{1}{2}} \\
b'(x) &= -2 \cdot (1-4x)^{-\frac{1}{2}} \\
b''(x) &= -2 \cdot 2 \cdot (1-4x)^{-\frac{3}{2}} \\
b'''(x) &= -2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (1-4x)^{-\frac{5}{2}} \\
b''''(x) &= -2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (1-4x)^{-\frac{7}{2}} \\
&\vdots \\
b^{(n)}(x) &= -2 \cdot (2n-2)^{\underline{n-1}} \cdot (1-4x)^{-\frac{2n-1}{2}} \\
b^{(n+1)}(x) &= -2 \cdot (2n)^{\underline{n}} \cdot (1-4x)^{-\frac{2n+1}{2}}
\end{aligned}
$$

$x = 0$ を代入すると、最後の式はこうなる。

$$
b^{(n+1)}(0) = -2 \cdot (2n)^{\underline{n}}
$$

さっき、冪級数で求めた式、きみが行き止まりだと言った式を引っ張り出して、$n+1$ を考える。

$$
b_{n+1} = \frac{b^{(n+1)}(0)}{(n+1)^{\underline{n+1}}}
$$

この 2 つの式から、次を得る。

$$
b_{n+1} = \frac{-2 \cdot (2n)^{\underline{n}}}{(n+1)^{\underline{n+1}}}
$$

これで、b_{n+1} を得た。ぜんぜん行き止まりじゃないね。きみ、b_n と a_n の関係は覚えてる？

$$
a_n = -\frac{b_{n+1}}{2}
$$

あとはもう手の運動だ。

$$
\begin{aligned}
a_n &= -\frac{b_{n+1}}{2} \\
&= \frac{(2n)^{\underline{n}}}{(n+1)^{\underline{n+1}}} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)^{\underline{n}}}{(n)^{\underline{n}}} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}
\end{aligned}
$$

よって、

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

はい、これで、ひと仕事おしまい。同じ式ができたね」

12　収束半径

「ありがとう……というか、おめでとう」僕は言う。
「なかなか、おもしろかったよ」彼女は人差し指をまっすぐ立てる。

僕は、ミルカさんを見る。この人は、なんて……。ぶっきらぼうだけど優しい。冷静なようで熱い。限られた面(facet)しか見えないんだけれど、それでも、僕は、ミルカさんのことが、やはり。

ミルカさんが、ほんのわずか目を細め、立ち上がった。

「記念に——踊ってみたいな」

僕も立ち上がる。

（どういうこと？）

ミルカさんは僕のほうにすっと左手を伸ばす。僕は右手を伸ばし、小鳥をそっと止まらせるようにミルカさんの白い指先を乗せる。

（あたたかい）

僕たちは手をつないだまま、書棚の前の広いスペースに移動する。
ミルカさんは、僕の周りを円を描いてゆっくり歩む。
一歩。
また一歩。
軽いステップをときおり混ぜながら。
ミルカさんは、踊るように歩む。
放課後の図書室。僕たちの他には誰もいない。
彼女のかすかな足音だけが聞こえる。
「ミルカさんは——僕からいつも同じ距離だけ離れてる。円周上だね。単位円かな」
僕はいったい何を言っているんだろう。
ミルカさんは「ふうん」と言って足を止め「私たちの腕の長さの和が 1 ならね」と答えて目を閉じた。
ふと、僕は思い出す。

……彼女の「すぐそば」$(h \to 0)$ に居られないとしても、「すぐ隣」$(h = 1)$ には居たいな……

そんなふうに考えたときのことを。

ミルカさんが急に目を開ける。

「半径がゼロでも——」と言いながら、驚くほどの力で僕を引き寄せる。
「半径がゼロでも——離れてる？」
そう言ってミルカさんは、眼鏡同士が触れそうなほどの距離まで、なめらかに顔を近づける。
僕は、何も言えない。
ミルカさんも、もう何も言わない。
半径がゼロでも円は円。たった一点からなる円。$\frac{0}{0}$ は不定なのか。収束半径は 1 か。
そして、僕は。
僕たちは。
無言のまま、
ゆっくりと顔を漸近させ——

「下校時間です」

瑞谷女史の声が響いた。
僕たちの距離は、ゼロから一気に伸びる。
二人の腕の長さの和まで。

「ミルカさんとコンボリューション」終

読者のみなさんへ

こんにちは、結城浩です。この『ミルカさんとコンボリューション』は、ミルカさんシリーズの第 5 作目になります。

今回「僕」とミルカさんが一般項を導出した数列 $\langle 1, 1, 2, 5, 14, \ldots \rangle$ は、**カタラン数** (Catalan number) といいます。カタラン数はフィボナッチ数列と同じく、非常に多種類の問題に登場します。

「僕」が考えていた「うまい形の積の和」には名前があります。それはこの物語のタイトルにもなっている**コンボリューション** (convolution) です。日本語では**たたみ込み**といいます。

「数列」に対応する「母関数」を考えたとき、「数列をたたみ込んだ数列」に対応する母関数は「元の母関数を掛けて得られた関数」になります。数列 $\langle a_n \rangle$ と $\langle b_n \rangle$ のたたみ込みを $\langle a_n \rangle * \langle b_n \rangle$ で表すと、以下のようになります。

$$
\begin{aligned}
\langle a_n \rangle = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle \qquad &\longleftrightarrow \qquad a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
\langle b_n \rangle = \langle b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots \rangle \qquad &\longleftrightarrow \qquad b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \\
\langle a_n \rangle * \langle b_n \rangle = \langle \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \rangle \qquad &\longleftrightarrow \qquad a(x)b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n
\end{aligned}
$$

これが「僕」が夜中、自室で興奮しながら考えていたことでした。「数列のたたみ込み」と「母関数の積」がちょうど対応付けられるというのは、たいそう美しい事実ですね。

なお、ミルカさんが $a_+(x)$ を捨てるときに $x = 0$ を代入していますが、$x \to 0$ の極限を考えたほうがより適切だと思います。また、$b(x) = \sqrt{1 - 4x}$ を無限回微分して係数を求めるあたりの議論は、いわゆる**テイラー展開** (マクローリン展開) になります。きちんと調べたい方のために補足しておきます。

この文章の PDF ファイルは、以下の URL から入手できます。結城へのフィードバックも下記ページから送ることができますので、ぜひみなさんのご感想をお聞かせください。

ミルカさんとコンボリューション

http://www.hyuki.com/girl/convolution.html

更新履歴

- 2005 年 11 月、執筆開始。
- 2005 年 12 月、漸化式作成。
- 2005 年 1 月、公開および微調整。

参考文献

[1] Graham, Knuth, Patashnik, 『コンピュータの数学』, ISBN 4-320-02668-3, 共立出版, 1993.
和を求めることをテーマにした離散数学の本です。数列のたたみ込み、二項定理の拡張、下方階乗冪、それに母関数を使ってカタラン数の一般項を求める方法は、この本を参考にしました。

[2] 栗田哲也, 福田邦彦, 坪田三千雄,『マスター・オブ・場合の数』, ISBN4-88742-028-5, 東京出版, 1999 年.
「場合の数」についての高校生向け参考書です。カタラン数が登場する興味深い問題についてもいくつか出てきます。道のたどり方に対応させてカタラン数の一般項を求める方法は、この本を参考にしました。

[3] 吉田武, 『オイラーの贈り物』, ちくま学芸文庫, ISBN4-480-08675-7, 2001 年.
たった 1 つの数式 $e^{i\pi} = -1$ を独学で理解できるように、数学の基礎から積み上げていく本です。テイラー展開と一般の二項展開について参考にしました。

[4] Richard P. Stanley, “Enumerative Combinatorics”, Volume 2, ISBN0-521-78987-7, 1999 年.
カタラン数の応用例が数多く紹介されています (p.219–229)。「カタラニア (Catalania)」と呼ばれるカタラン数マニア向け。

[5] Eric W. Weisstein et al., “Catalan Number.” From MathWorld — A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html
カタラン数について書かれているページです。漸化式、二項係数との関係、またカタラン数が登場する例が紹介されています。

[6] Eric W. Weisstein, “Convolution.” From MathWorld — A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html
（積分バージョンの）たたみ込みについて書かれているページです。

[7] 結城浩, 『プログラマの数学』, ソフトバンククリエイティブ, ISBN4-7973-2973-4, 2005 年. http://www.hyuki.com/math/
結城浩が書いた、プログラミングに役立つ「数学的な考え方」を学ぶ入門書です。論理、数学的帰納法、順列・組み合わせについても解説されています。この『ミルカさんとコンボリューション』よりはずっと易しい内容です :-)

[8] 結城浩, 「数学ガール」, http://www.hyuki.com/girl/
結城浩が書いた、数学と少女が出てくる読み物を集めているページです。ミルカさんシリーズもここからすべてたどることができます。

ミルカさんシリーズ

- 『ミルカさん』(2004 年)
- 『ミルカさんの隣で』 (2005 年)
- 『ミルカさんとフィボナッチ数列』(2005 年)
- 『テトラちゃんと相加相乗平均』(2005 年)
- 『ミルカさんとコンボリューション』(2006 年)