群の作用と軌道分解

結城浩 *

2015 年 3 月 31 日

作用

G を群とし、X を集合とする。
$G \times X$ から X への写像 $f: G \times X \to X$ を考え、$f(g, x)$ を $g \cdot x$ と表記する。
以下の二つが成り立つとき、群 G は集合 X に**作用する**と呼ぶ。

- $e \cdot x = x$ 　(e は群 G の単位元、x は集合 X の任意の元)
- $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ 　(g_1, g_2 は群 G の任意の元、x は集合 X の任意の元)

固定部分群

群 G が集合 X に作用しているとする。集合 X の一つの元 x に対し、群 G の元 g のうち、

$$g \cdot x = x$$

を満たす元全体の集合を G_x と書き、x の**固定部分群**と呼ぶ。すなわち、

$$G_x = \left\{ g \in G \;\middle|\; g \cdot x = x \right\}$$

である。

軌道

群 G が集合 X に作用しているとする。集合 X の一つの元 x に対し、群 G の元を作用させて得られる $g \cdot x$ 全体の集合を $G \cdot x$ と書き、x を含む**軌道**と呼ぶ。すなわち、

$$G \cdot x = \left\{ g \cdot x \;\middle|\; g \in G \right\}$$

である。

* http://www.hyuki.com/mathinfo/

軌道分解

群 G が集合 X に作用しているとき、集合 X 上の同値関係 $\sim$ を以下のように定義する。

$$x \sim y \iff g \cdot x = y \text{ を満たす、群 } G \text{ の元 } g \text{ が存在する}$$

関係 $\sim$ が同値関係であることを証明する。

- （反射律）群 G の元として単位元 e を選べば、集合 X の任意の元 X について $e \cdot x = x$ であるから、$x \sim x$ が成り立つ。
- （対称律）集合 X の任意の二元 x, y について、$g \cdot x = y$ ならば $g^{-1} \cdot y = x$ であるから、$x \sim y$ ならば $y \sim x$ が成り立つ。
- （推移律）$g_1 \cdot x = y$ かつ $g_2 \cdot y = z$ ならば、$(g_2 g_1) \cdot x = g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = g_2 \cdot y = z$ であるから、$x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$ が成り立つ。

（証明終わり）

▶ 反射律は単位元の存在に、対称律は逆元の存在に、そして推移律は演算として閉じていることに対応している。

集合 X を同値関係 $\sim$ で割り、同値類に分けたとき、同値類と軌道とは一対一に対応する。

参考

『岩波数学入門辞典』を参考にして書いています。