連続写像による連結な位相空間の像は連結であることの証明*

結城浩†

2015年3月29日

命題　f を、位相空間 X から位相空間 Y への連続写像とする。位相空間 X が連結ならば、像 $f(X)$ は連結である。

証明　$f(X)$ が連結ではないと仮定し、矛盾を導く。連結の定義により位相空間 $f(X)$ を分離する開集合が存在するので、それらを U, V とする。このとき、

$$U \cap V = \varnothing, \quad U \cup V \supset f(X), \quad U \cap f(X) \neq \varnothing, \quad V \cap f(X) \neq \varnothing$$

である。f が連続写像であることから、連続写像の定義により開集合 U, V の逆像も開集合になるので、それぞれ A, B とする。

▶ A, B は、$A = \{a \in X \mid \exists u \in U, f(a) = u\}, B = \{b \in X \mid \exists v \in V, f(b) = v\}$ と定義される。

このとき、$U \supset f(A), V \supset f(B)$ なので、

$$U \cap V \supset f(A) \cap f(B)$$

がいえる。

▶ $U \supset f(A)$ になるのはなぜかというと、A の定義より A の任意の元 a に対して、$f(a) \in U$ といえるからである。$V \supset f(B)$ も同様に考える。

ここで、$U \cap f(X) \neq \varnothing, V \cap f(X) \neq \varnothing$ から、$A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$ である。また、$U \cup V \supset f(X)$ であるから $A \cup B = X$ がいえる。

▶ $U \cup V \supset f(X)$ から X の任意の元 x に対して $f(x) \in U \cup V$ がいえ、$f(x) \in U$ または $f(x) \in V$ がいえる。これは $x \in A$ または $x \in B$ すなわち $x \in A \cup B$ にほかならない。よって、$A \cup B \supset X$ である。もともと $A \cup B \subset X$ であるから、$A \cup B = X$ がいえた。

位相空間 X は連結であるから、

$$A \cap B \neq \varnothing$$

である。

---

* https://twitter.com/hyuki/status/552374224233709568, コメントくださった方々（@kagami_hr さん、@tenapyon さん、@taikutsuotoko01 さん、@bioshino さん、@ta_shim_at_nhn さん）に感謝します。

† http://www.hyuki.com/mathinfo/

▶ A, B はどちらも空集合ではない開集合で、$A \cup B = X$ なのだから、連結の定義より、$A \cap B \neq \varnothing$ でなければならない。さもないと、X が A と B によって分離されてしまい、連結ではなくなってしまう

以上より、$U \cap V \supset f(A) \cap f(B) \supset f(A \cap B) \neq \varnothing$ がいえる。すなわち、

$$U \cap V \neq \varnothing$$

である。これは、

$$U \cap V = \varnothing$$

に矛盾する。したがって、$f(X)$ は連結である。（証明終わり）