行列の共役が作り出す関係が同値関係であることの証明

結城浩 *

2015年3月27日

n 次の正方行列 A, B に対して、関係 $A \sim B$ を以下のように定義するとき、この関係 $\sim$ が同値関係であることを証明する。

$$A \sim B \iff P^{-1}AP = B \text{ を満たす正則行列 } P \text{ が存在する}$$

① (反射律) P として単位行列を取れば $P^{-1}AP = A$ が成り立つから、$A \sim A$ である。

② (対称律) $A \sim B$ のとき、$P^{-1}AP = B$ なる P が存在し、$Q = P^{-1}$ と置けば $Q^{-1}BQ = A$ である。したがって、$A \sim B$ ならば $B \sim A$ である。

③ (推移律) $A \sim B$ かつ $B \sim C$ であると仮定する。このとき、$A \sim B$ から $P^{-1}AP = B$ なる正則行列 P が存在し、$B \sim C$ から $Q^{-1}BQ = C$ なる正則行列 Q が存在する。よって、$Q^{-1}BQ = Q^{-1}P^{-1}APQ = C$ である。ここで $R = PQ$ と置けば、$R^{-1}AR = C$ が成り立ち、$A \sim C$ であることがいえる。

以上より、関係 $\sim$ が同値関係であることが証明できた。

※①は単位行列、②は逆行列、③は行列の積に対応しているのが興味深い。

* http://www.hyuki.com/mathinfo/

各方面からいただいたご指摘からメモ。

- 実行列か複素行列なのかを書いた方がいい。
- P^{-1} と書くからには正則行列 P や可逆行列と書いた方がいい。
- 行列の相似性（similarity）
- 行列環の軌道分解