単位元以外の元の位数が 2 に等しい群はアーベル群であることの証明[*]

結城浩[†]

2015 年 3 月 30 日

命題　群 G において、単位元以外の任意の元の位数が 2 に等しいならば、G はアーベル群である。

▶ 群 G の元 g の位数が 2 に等しいとは、$gg = e$ を意味する（e は単位元）。群 G がアーベル群であるとは、群 G が可換であることを意味する。すなわち、群 G の任意の 2 元 a, b について $ab = ba$ であることを意味する。

証明　a, b を G の元とする。仮定より、

$$(ab)(ab) = e, \quad aa = e, \quad bb = e$$

がいえる。すなわち、

$$ab = (ab)^{-1}, \quad a = a^{-1}, \quad b = b^{-1}$$

が成り立つ。また一般に、

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

が成り立つ。よって、

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$$

すなわち $ab = ba$ が成り立ち、群 G はアーベル群である。
（証明終わり）

[*] https://twitter.com/hyuki/status/577230101940609024
[†] http://www.hyuki.com/mathinfo/

この問題は群論 bot（@GruppenTheoBOT）のツイートをもとにしている。
https://twitter.com/gruppentheobot/status/577222535529435136