離散系バージョンの関数探し[*]

結城浩[†]

2005 年 5 月

はじめに

この記事は、「ミルカさんの隣で」[*1]を読んで、「連続系の関数に対応する離散系の関数を探すこと」すなわち「離散系バージョンの関数探し」に興味を持った方のための文章です。

私たちはすでに、微分演算子 D と差分演算子 Δ を学びました。そして、$\mathrm{D}x^n$ と $\Delta x^{\underline{n}}$ との対応関係から、関数 x^n に対して、離散系バージョンの関数 $x^{\underline{n}}$ を見つけ出しました（n は正の整数)。

それでは、以下に示す関数に対して、離散系バージョンの関数をそれぞれ探してください。

- 指数関数 e^x
- 対数関数 $\ln x$ ($\ln x$ は $\log_e x$ の意味, $x > 0$)
- 三角関数 $\cos x$ および $\sin x$

次ページからは、筆者が考える離散系バージョンを探す過程が書かれています。読み進む前に、ぜひあなたも自分で考えてみてください。

---

[*] http://www.hyuki.com/story/diffsum2.html

[*1] http://www.hyuki.com/story/diffsum.html

指数関数

指数関数、すなわち e^x に対応する離散系の関数を探しましょう。

そのためには、まず指数関数が持っている本質的な性質を考える必要があります。指数関数は、微分して得られた関数 (導関数) が元の関数と等しくなります。つまり、次の式が成り立ちます。

$$De^x = e^x$$

この性質を心に留め、e^x に対応する離散系の関数を $f(x)$ としましょう。すると、$f(x)$ は次のような性質を持っていてほしいですね。

$$\Delta f(x) = f(x)$$

演算子 Δ の定義によって左辺を展開します。

$$f(x+1) - f(x) = f(x)$$

これを整理して、次の式を得ます。

$$f(x+1) = 2 \cdot f(x)$$

非負整数 ($x \geq 0$) の範囲で考えると、

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= 2 \cdot f(x) \\
&= 2 \cdot 2 \cdot f(x-1) \\
&= \cdots \\
&= 2^k \cdot f(x-(k-1)) \\
&= \cdots \\
&= 2^{x+1} \cdot f(0)
\end{aligned}$$

ここで、初期条件として $e^0 = 1$ にならって $f(0) = 1$ とすると、指数関数 e^x に対応する離散系の関数 $f(x)$ は次の形になります。

$$f(x) = 2^x$$

以上で、次のような対応関係を作ることができました。

$$e^x \qquad \longleftrightarrow \qquad 2^x$$

対数関数

対数関数 $\ln x$ に対応する離散系の関数を探しましょう。$\ln x$ は定数 e を底とした対数 $\log_e x$ を意味します。真数条件 $x > 0$ の範囲とします。

指数関数のときには、$De^x = e^x$ という関係式 (微分方程式) から $\Delta f(x) = f(x)$ という関係式 (差分方程式) を作り出すことができました。では、対数関数 $f(x) = \ln x$ に対して、このような関係式は見つけられるでしょうか。

対数関数 $\ln x$ を微分すると、次のようになります。

$$D \ln x = x^{-1}$$

そこで、$\ln x$ に対応する離散系の関数を $f(x)$ は、次の関係式を満たすことが期待されます。

$$\Delta f(x) = x^{\underline{-1}}$$

でも「ミルカさんの隣で」では、$x^{\underline{n}}$ の表記は $n > 0$ の範囲でしか定義しませんでした。$n \leq 0$ のとき、$x^{\underline{n}}$ をどう定義するのが妥当かをまず考えましょう。

$n = 3, 2, 1$ のとき、$x^{\underline{n}}$ は次のようになります。

$$\begin{aligned} x^{\underline{3}} &= (x-0)(x-1)(x-2) \\ x^{\underline{2}} &= (x-0)(x-1) \\ x^{\underline{1}} &= (x-0) \end{aligned}$$

この式をじっと見ると、次のことが分かります。

- $x^{\underline{3}}$ を $(x-2)$ で割ると $x^{\underline{2}}$ が得られる。
- $x^{\underline{2}}$ を $(x-1)$ で割ると $x^{\underline{1}}$ が得られる。

これを自然に (指数法則を念頭において) 延長すると、次のようになります。

- $x^{\underline{1}}$ を $(x-0)$ で割ると $x^{\underline{0}}$ が得られる。
- $x^{\underline{0}}$ を $(x+1)$ で割ると $x^{\underline{-1}}$ が得られる。
- $x^{\underline{-1}}$ を $(x+2)$ で割ると $x^{\underline{-2}}$ が得られる。
- $x^{\underline{-2}}$ を $(x+3)$ で割ると $x^{\underline{-3}}$ が得られる。

すなわち、こうなります。

$$\begin{aligned} x^{\underline{0}} &= 1 \\ x^{\underline{-1}} &= \frac{1}{(x+1)} \\ x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\ x^{\underline{-3}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} \end{aligned}$$

さてここで、対数関数に戻ります。以下の差分方程式を解きたかったのでした。

$$\Delta f(x) = x^{\underline{-1}}$$

ここで $x^{\underline{-1}} = \dfrac{1}{x+1}$ ですから、差分方程式は次のようになります。

$$f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1}$$

x を正の整数として、次のような式を得ます。

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x-1) &= \frac{1}{x} \\
f(x-1) - f(x-2) &= \frac{1}{x-1} \\
f(x-2) - f(x-3) &= \frac{1}{x-2} \\
&\vdots \\
f(2) - f(1) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

両辺をそれぞれ加えると、左辺の項の大半は相殺して消えます。残るのは $f(x)$ と $f(1)$ だけです。

$$\begin{aligned}
f(x) - f(1) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{2} \\
&= \sum_{2 \le k \le x} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

したがって、次式を得ます。

$$f(x) = f(1) + \sum_{2 \le k \le x} \frac{1}{k}$$

差分方程式 $f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1}$ は、$f(1)$ の値が何であっても成り立ちますが、$f(1)$ は何にするのが妥当でしょう。ここでは $f(1) = 1$ とします。

これで、対数関数に対応する離散系の関数として次の式を得ます (x は正の整数)。

$$f(x) = \sum_{1 \le k \le x} \frac{1}{k}$$

なお、ここで得た $f(x)$ には**調和数** H_x という名前がついています。

以上で、次のような対応関係を作ることができました。

$$\ln x \qquad \longleftrightarrow \qquad \sum_{1 \le k \le x} \frac{1}{k}$$

三角関数

三角関数 $\cos x$ と $\sin x$ に対応する離散系の関数をそれぞれ探しましょう。

三角関数の周期性 $(\cos\theta = \cos(2\pi + \theta))$ や、$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ という関係式などに着目するのは後回しです。まずは、$\cos x$ と $\sin x$ をそれぞれ微分したときの振る舞いを調べましょう。

$$\begin{aligned} D\cos x &= -\sin x \\ D\sin x &= \cos x \end{aligned}$$

上の微分方程式を念頭に置いた上で、$\cos x$ と $\sin x$ に対応する離散系の関数をそれぞれ $f(x)$, $g(x)$ とします。すると、次の連立差分方程式を得ます。

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= -g(x) \\ \Delta g(x) &= f(x) \end{aligned}$$

演算子 Δ の定義から、次の式を得ます。

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= -g(x) \\ g(x+1) - g(x) &= f(x) \end{aligned}$$

移項して、

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) - g(x) \\ g(x+1) &= f(x) + g(x) \end{aligned}$$

これは f と g が絡み合った漸化式ですね。x を 0 以上の整数として、初期値 $f(0)$ と $g(0)$ という初期値が与えられれば、$f(x)$ と $g(x)$ を順番に求めていくことができます。

$\cos 0 = 1$ および $\sin 0 = 0$ から類推して、初期値を $f(0) = 1$ および $g(0) = 0$ と定め、表を作りましょう。

x	$f(x)$	$g(x)$	$f^2(x)+g^2(x)$
0	1	0	1
1	1	1	2
2	0	2	4
3	-2	2	8
4	-4	0	16
5	-4	-4	32
6	0	-8	64
7	8	-8	128
8	16	0	256
9	16	16	512
10	0	32	1024
11	-32	32	2048
12	-64	0	4096
13	-64	-64	8192
14	0	-128	16384
15	128	-128	32768

$f(x)$ と $g(x)$ の一般形は次の通りです。見やすくするため 16^n でスケールダウンしています。

x	$\frac{f(x)}{16^n}$	$\frac{g(x)}{16^n}$
$8n+0$	1	0
$8n+1$	1	1
$8n+2$	0	2
$8n+3$	-2	2
$8n+4$	-4	0
$8n+5$	-4	-4
$8n+6$	0	-8
$8n+7$	8	-8

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ には、次のような周期性があります。

$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

私たちが得た $f(x)$, $g(x)$ に周期性はあるでしょうか。16 倍というスケールの変化を無視すれば、以下のような式が成り立ちます。

$$f(x+8) = 16f(x)$$
$$g(x+8) = 16g(x)$$

$f^2(x)+g^2(x)$ の値を調べてみると、次のような関係式が成り立っています (表の右端の欄参照)。

$$f^2(x)+g^2(x)=2^x$$

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$ と比較すると、ずいぶん違いますね。

点 $(\cos x, \sin x)$ を座標平面にプロットすると、原点を中心にした半径 1 の円が描かれます。一方、点 $(f(x), g(x))$ をプロットすると、点は図 1 のように螺旋状に並びます。

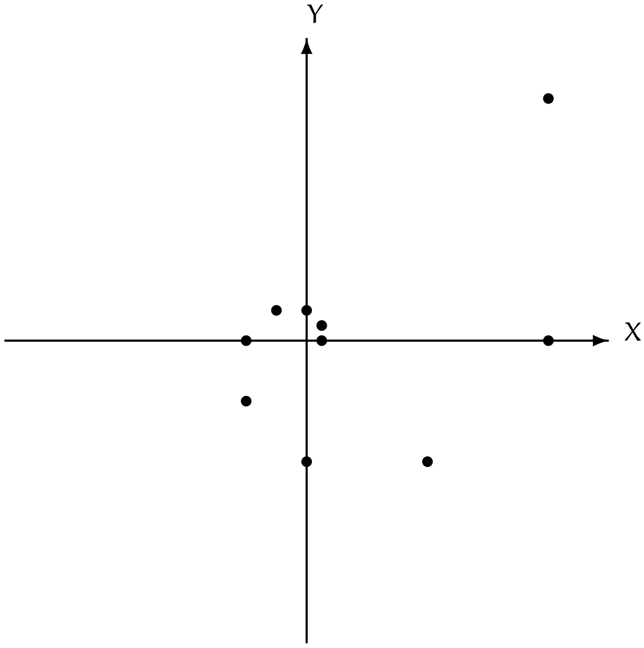

図 1　座標平面に点 $(f(x), g(x))$ をプロットする

これを見て筆者は「本当に $f(x), g(x)$ が三角関数の離散系バージョンなんだろうか。もっと適切な関数が見つかるのではないだろうか」と思っています。読者のみなさんはどう思いますか。

$$\begin{array}{ccc} \cos x & \longleftrightarrow & f(x) \\ \sin x & \longleftrightarrow & g(x) \end{array}$$

参考文献

[1] 結城浩,「ミルカさんの隣で」, http://www.hyuki.com/story/diffsum.html, 2005.
[2] Graham, Knuth, Patashnik,『コンピュータの数学』(p. 54–55), ISBN 4-320-02668-3, 共立出版, 1993.

読者のみなさんへ

「離散系バージョンの関数探し」の最新版 PDF ファイルは、以下の URL から入手できます。フィードバックもこのページから送ることができますので、ぜひみなさんのご感想をお聞かせください。

離散系バージョンの関数探し

http://www.hyuki.com/story/diffsum2.html