

離散系バージョンの関数探し*

結城浩†

2005年5月

はじめに

この記事は、「ミルカさんの隣で」*¹を読んで、「連続系の関数に対応する離散系の関数を探すこと」すなわち「離散系バージョンの関数探し」に興味を持った方のための文章です。

私たちはすでに、微分演算子 D と差分演算子 Δ を学びました。そして、 Dx^n と Δx^n との対応関係から、関数 x^n に対して、離散系バージョンの関数 x^n を見つけ出しました (n は正の整数)。

それでは、以下に示す関数に対して、離散系バージョンの関数をそれぞれ探してください。

- 指数関数 e^x
- 対数関数 $\ln x$ ($\ln x$ は $\log_e x$ の意味, $x > 0$)
- 三角関数 $\cos x$ および $\sin x$

次ページからは、筆者が考える離散系バージョンを探す過程が書かれてい

* <http://www.hyuki.com/story/diffsum2.html>

† <http://www.hyuki.com/> Hiroshi Yuki © 2005, All rights reserved.

*¹ <http://www.hyuki.com/story/diffsum.html>

ます。読み進む前に、ぜひあなたも自分で考えてみてください。

指数関数

指数関数、すなわち e^x に対応する離散系の関数を探しましょう。

そのためには、まず指数関数を持っている本質的な性質を考える必要があります。指数関数は、微分して得られた関数 (導関数) が元の関数と等しくなります。つまり、次の式が成り立ちます。

$$De^x = e^x$$

この性質を心に留め、 e^x に対応する離散系の関数を $f(x)$ としましょう。すると、 $f(x)$ は次のような性質を持っていてほしいですね。

$$\Delta f(x) = f(x)$$

演算子 Δ の定義によって左辺を展開します。

$$f(x+1) - f(x) = f(x)$$

これを整理して、次の式を得ます。

$$f(x+1) = 2 \cdot f(x)$$

非負整数 ($x \geq 0$) の範囲で考えると、

$$\begin{aligned} f(x+1) &= 2 \cdot f(x) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot f(x-1) \\ &= \dots \\ &= 2^k \cdot f(x - (k-1)) \\ &= \dots \\ &= 2^{x+1} \cdot f(0) \end{aligned}$$

ここで、初期条件として $e^0 = 1$ にならって $f(0) = 1$ とすると、指数関数 e^x に対応する離散系の関数 $f(x)$ は次の形になります。

$$f(x) = 2^x$$

以上で、次のような対応関係を作ることができました。

$$e^x \quad \longleftrightarrow \quad 2^x$$

対数関数

対数関数 $\ln x$ に対応する離散系の関数を探しましょう。 $\ln x$ は定数 e を底とした対数 $\log_e x$ を意味します。真数条件 $x > 0$ の範囲とします。

指数関数のときには、 $D e^x = e^x$ という関係式 (微分方程式) から $\Delta f(x) = f(x)$ という関係式 (差分方程式) を作り出すことができました。では、対数関数 $f(x) = \ln x$ に対して、このような関係式は見つけれられるでしょうか。

対数関数 $\ln x$ を微分すると、次のようになります。

$$D \ln x = x^{-1}$$

そこで、 $\ln x$ に対応する離散系の関数を $f(x)$ は、次の関係式を満たすことが期待されます。

$$\Delta f(x) = x^{-1}$$

でも「ミルカさんの隣で」では、 x^n の表記は $n > 0$ の範囲でしか定義しませんでした。 $n \leq 0$ のとき、 x^n をどう定義するのが妥当かをまず考えましょう。

$n = 3, 2, 1$ のとき、 x^n は次のようになります。

$$x^3 = (x - 0)(x - 1)(x - 2)$$

$$x^2 = (x - 0)(x - 1)$$

$$x^1 = (x - 0)$$

この式をじっと見ると、次のことが分かります。

- x^3 を $(x - 2)$ で割ると x^2 が得られる。
- x^2 を $(x - 1)$ で割ると x^1 が得られる。

これを自然に (指数法則を念頭において) 延長すると、次のようになります。

- x^1 を $(x - 0)$ で割ると x^0 が得られる。
- x^0 を $(x + 1)$ で割ると x^{-1} が得られる。
- x^{-1} を $(x + 2)$ で割ると x^{-2} が得られる。
- x^{-2} を $(x + 3)$ で割ると x^{-3} が得られる。

すなわち、こうなります。

$$x^0 = 1$$

$$x^{-1} = \frac{1}{(x + 1)}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{(x + 1)(x + 2)}$$

$$x^{-3} = \frac{1}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$$

さてここで、対数関数に戻ります。以下の差分方程式を解きたかったのでした。

$$\Delta f(x) = x^{-1}$$

ここで $x^{-1} = \frac{1}{x + 1}$ ですから、差分方程式は次のようになります。

$$f(x + 1) - f(x) = \frac{1}{x + 1}$$

x を正の整数として、次のような式を得ます。

$$f(x) - f(x - 1) = \frac{1}{x}$$

$$f(x - 1) - f(x - 2) = \frac{1}{x - 1}$$

$$f(x - 2) - f(x - 3) = \frac{1}{x - 2}$$

$$\vdots$$

$$f(2) - f(1) = \frac{1}{2}$$

両辺をそれぞれ加えると、左辺の項の大半は相殺して消えます。残るのは $f(x)$ と $f(1)$ だけです。

$$\begin{aligned} f(x) - f(1) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{2} \\ &= \sum_{2 \leq k \leq x} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

したがって、次式を得ます。

$$f(x) = f(1) + \sum_{2 \leq k \leq x} \frac{1}{k}$$

差分方程式 $f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1}$ は、 $f(1)$ の値が何であっても成り立ちますが、 $f(1)$ は何にするのが妥当でしょう。ここでは $f(1) = 1$ とします。

これで、対数関数に対応する離散系の関数として次の式を得ます (x は正の整数)。

$$f(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} \frac{1}{k}$$

なお、ここで得た $f(x)$ には調和数 H_x という名前がついています。

以上で、次のような対応関係を作ることができました。

$$\ln x \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{1 \leq k \leq x} \frac{1}{k}$$

三角関数

三角関数 $\cos x$ と $\sin x$ に対応する離散系の関数をそれぞれ探しましょう。

三角関数の周期性 ($\cos \theta = \cos(2\pi + \theta)$) や、 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ という関係式などに着目するのは後回しです。まずは、 $\cos x$ と $\sin x$ をそれぞれ微分したときの振る舞いを調べましょう。

$$D \cos x = -\sin x$$

$$D \sin x = \cos x$$

上の微分方程式を念頭に置いた上で、 $\cos x$ と $\sin x$ に対応する離散系の関数をそれぞれ $f(x)$, $g(x)$ とします。すると、次の連立差分方程式を得ます。

$$\Delta f(x) = -g(x)$$

$$\Delta g(x) = f(x)$$

演算子 Δ の定義から、次の式を得ます。

$$f(x+1) - f(x) = -g(x)$$

$$g(x+1) - g(x) = f(x)$$

移項して、

$$f(x+1) = f(x) - g(x)$$

$$g(x+1) = f(x) + g(x)$$

これは f と g が絡み合った漸化式ですね。 x を 0 以上の整数として、初期値 $f(0)$ と $g(0)$ という初期値が与えられれば、 $f(x)$ と $g(x)$ を順番に求めていくことができます。

$\cos 0 = 1$ および $\sin 0 = 0$ から類推して、初期値を $f(0) = 1$ および $g(0) = 0$ と定め、表を作りましょう。

x	$f(x)$	$g(x)$	$f^2(x) + g^2(x)$
0	1	0	1
1	1	1	2
2	0	2	4
3	-2	2	8
4	-4	0	16
5	-4	-4	32
6	0	-8	64
7	8	-8	128
8	16	0	256
9	16	16	512
10	0	32	1024
11	-32	32	2048
12	-64	0	4096
13	-64	-64	8192
14	0	-128	16384
15	128	-128	32768

$f(x)$ と $g(x)$ の一般形は次の通りです。見やすくするため 16^n でスケールダウンしています。

x	$\frac{f(x)}{16^n}$	$\frac{g(x)}{16^n}$
$8n + 0$	1	0
$8n + 1$	1	1
$8n + 2$	0	2
$8n + 3$	-2	2
$8n + 4$	-4	0
$8n + 5$	-4	-4
$8n + 6$	0	-8
$8n + 7$	8	-8

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ には、次のような周期性があります。

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

私たちが得た $f(x)$, $g(x)$ に周期性はあるでしょうか。16 倍というスケールの変化を無視すれば、以下のような式が成り立ちます。

$$f(x + 8) = 16f(x)$$

$$g(x + 8) = 16g(x)$$

$f^2(x) + g^2(x)$ の値を調べてみると、次のような関係式が成り立っています (表の右端の欄参照)。

$$f^2(x) + g^2(x) = 2^x$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ と比較すると、ずいぶん違いますね。

点 $(\cos x, \sin x)$ を座標平面にプロットすると、原点を中心にした半径 1 の円が描かれます。一方、点 $(f(x), g(x))$ をプロットすると、点は図 1 のように螺旋状に並びます。

これを見て筆者は「本当に $f(x), g(x)$ が三角関数の離散系バージョンなんだろうか。もっと適切な関数が見つかるのではないだろうか」と思っています。読者のみなさんはどう思いますか。

$$\begin{array}{lcl} \cos x & \longleftrightarrow & f(x) \\ \sin x & \longleftrightarrow & g(x) \end{array}$$

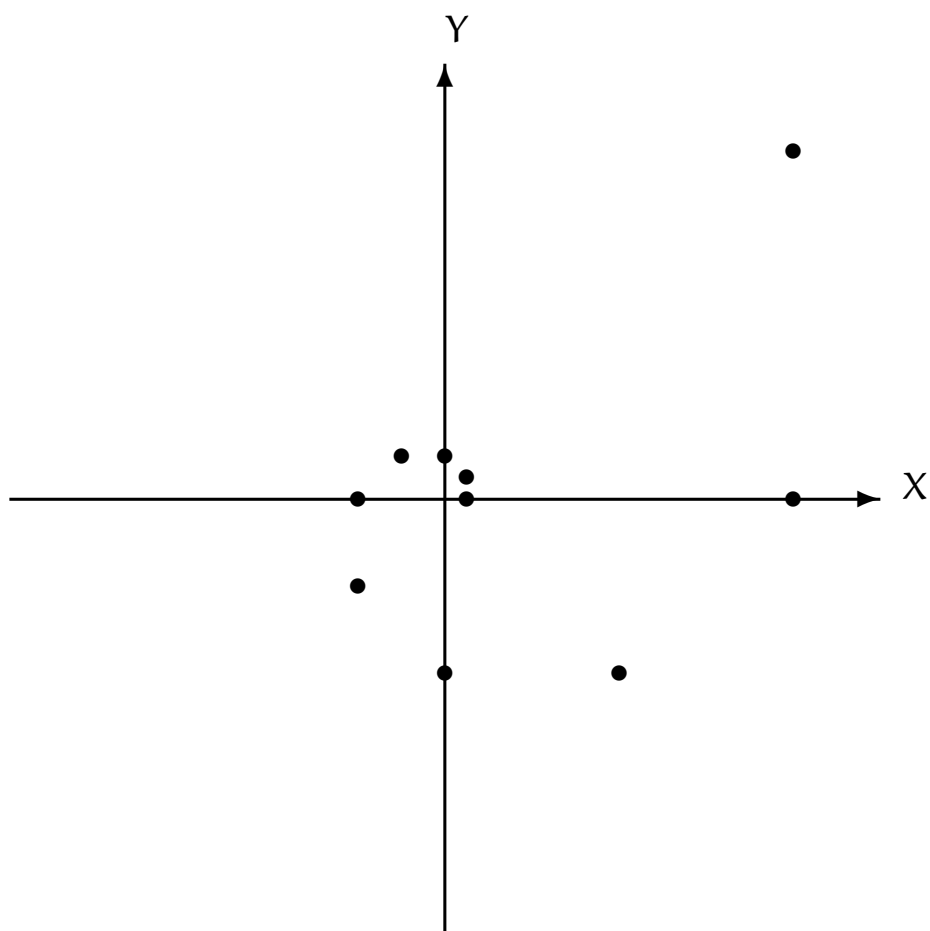


図1 座標平面に点 $(f(x), g(x))$ をプロットする

参考文献

- [1] 結城浩, 「ミルカさんの隣で」,
<http://www.hyuki.com/story/diffsum.html>, 2005.
- [2] Graham, Knuth, Patashnik, 『コンピュータの数学』 (p. 54–55), ISBN
4-320-02668-3, 共立出版, 1993.

読者のみなさんへ

「離散系バージョンの関数探し」の最新版 PDF ファイルは、以下の URL から入手できます。フィードバックもこのページから送ることができますので、ぜひみなさんのご感想をお聞かせください。

離散系バージョンの関数探し

<http://www.hyuki.com/story/diffsum2.html>

Copyright (C) 2005 Hiroshi Yuki (結城浩)

All rights reserved.